

Étude des limites de permutations aléatoires et
application aux permutations séparables

Armand Riera
Sous la direction de Jean-François Le Gall

Remerciements

Je remercie chaleureusement Jean-François Le Gall de m'avoir proposé ce sujet de mémoire, ainsi que pour tout le temps consacré à ce dernier. Je veux aussi le remercier pour ses conseils et remarques toujours utiles et raffinés. C'est aussi l'occasion de remercier l'ENS Ulm et l'université Paris-Sud pour la grande liberté accordée tout au long de mes études. Enfin, je tiens à remercier ma famille, mes amis Ulysse, Marion, François-Pierre, Alice et Helmi de rendre la vie plus colorée.

Table des matières

1	Espace des permutons	4
1.1	Coloriages et mesures	4
1.2	Motifs de permutation et de permutons	5
1.3	Convergence dans l'espace des permutons	8
1.4	Convergence en loi et Classes évitantes	14
2	Permutations séparables	19
2.1	Une bijection	20
2.2	Arbres de Schröder	25
2.3	Résultats combinatoires	27
3	Limite des permutations séparables	32
3.1	Fonction contour et extraction d'arbres	32
3.2	Convergence du contour et des feuilles	39
3.3	Étude des étiquettes et permuton limite	45
3.4	Quelques propriétés	52

L'objectif de ce mémoire est de présenter un aperçu d'une théorie naissante : les permutations aléatoires. Cette théorie cherche à donner une approche autre que purement combinatoire, pour répondre à des questions du type : À quoi ressemble une permutation typique vérifiant un certain nombre de propriétés ? Ce double penchant à la fois combinatoire et probabiliste s'est avéré très riche et profond, comme le montre par exemple la théorie des graphes aléatoires. Une des puissances des probabilités est de pouvoir définir des objets limites, parfois universels, desquels les problèmes combinatoires vont s'approcher. La théorie des probabilités est truffée de tels exemples : théorème de Donsker, Arbres de Kesten, Arbre Brownien, Serpent Brownien et par bonheur la liste ne s'arrête pas là. Pour illustrer cette démarche, on se concentrera sur l'article "The brownian limit of separable permutations" [5]. Le problème soulevé dans cet article est le suivant : à quoi ressemble une permutation séparable (i.e évitant les motifs 2413 et 3124) très grande ? Si on se focalise sur ce type de permutation, c'est, comme on le verra plus tard, car elles sont liées aux arbres de Galton-Watson et d'une manière plus subtile à l'excursion brownienne. C'est aussi l'exemple le plus simple (qui ne soit pas trivial) où l'objet limite n'est pas déterministe.

Remarquons qu'il n'est pas forcément évident de trouver un bon cadre pour parler de permutations limites. On pourrait de manière naturelle essayer de voir les permutations à travers la théorie des graphes grâce au passage aux graphes de permutations (pour une permutation à n éléments σ , on définit le graphe à n nœuds numérotés de 1 à n et on introduit une arête entre deux entiers $i < j$ si $\sigma(i) > \sigma(j)$, c'est-à-dire si c'est une inversion). Malheureusement cette vision ne s'inscrit pas dans l'étude locale des graphes. Le problème n'est pas l'éventuelle existence de plusieurs composantes connexes mais plutôt que l'étude des permutations nous mène à des graphes avec une forte densité d'arêtes. Pour le voir, prenons par exemple pour tout entier n non nul, σ_n une permutation aléatoire de taille n tirée de manière uniforme dans \mathfrak{S}_n . Un calcul direct montre que si on se place dans le graphe associé et qu'on choisit un nœud de manière uniforme, le nombre moyen d'arêtes qu'on verra depuis ce nœud sera d'ordre $\frac{n}{4}$. On pourrait cependant utiliser cette approche pour ancrer notre étude dans la théorie des graphons [9]. Les permutations ayant des propriétés assez particulières, au lieu de rentrer dans l'espace des graphons, on va plutôt définir un espace analogue plus adapté à leurs particularités, qu'on appellera par analogie espace des permutons.

Notre travail se divise en trois parties. On commence par présenter l'espace des permutons, en étudiant son lien avec les permutations ainsi que certaines propriétés générales. Une fois cela fait, on s'attaquera au problème des permutations séparables. On fera d'abord une étude plus combinatoire de ces permutations et on présentera calmement la correspondance entre permutations séparables et arbres de Galton-Watson (étiquetés). Puis on énoncera certaines propriétés limites simples afin de s'habituer à la nature de ces objets. Dans la dernière partie, on montrera la convergence vers un objet limite qu'on construira grâce à l'excursion brownienne (étiquetée). On conclura par une étude de certaines propriétés de l'objet limite.

Partie 1

Espace des permutons

1.1 Coloriages et mesures

À une permutation σ de taille n , on peut associer un coloriage du carré $[0; 1]^2$ de la manière suivante :

(1) On divise le carré $[0; 1]^2$ en un quadrillage régulier de n^2 sous-carrés $(C_{(i,j)})_{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2}$. Où l'on note $C_{i,j} = \{(x, y), (\lceil nx \rceil, \lceil ny \rceil) = (i, j)\}$ (voir ci dessous).

(2) On colorie les carrés $(C_{i,\sigma(i)})_{i \in \llbracket 1;n \rrbracket}$

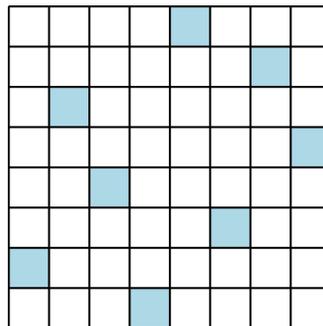


FIGURE 1.1 – Coloriage de la permutation 26418375

Notons aussi qu'un tel coloriage est une représentation géométrique de la matrice de permutation.

À partir de ce coloriage, on peut définir la mesure

$$n \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{C_{i,\sigma(i)}} \lambda(dx)$$

Où λ est la mesure de Lebesgue, sur \mathbb{R}^2 , restreinte au carré $[0;1]^2$. Étant donnée une permutation σ , on notera μ_σ sa mesure associée. Lors de la définition du coloriage, on aurait pu se questionner sur le rôle des frontières des sous-carrés, mais comme λ ne les charge pas, ceci ne pose aucun problème. Remarquons aussi que la fonction qui à une permutation σ associe μ_σ est injective. C'est cette représentation en tant que mesure qui va nous permettre de parler de limite de permutation.

Notons déjà que ces mesures vivent dans l'ensemble de probabilités du carré $[0;1]^2$, qui est un espace compact pour la topologie de la convergence faible, il sera donc aisé de parler de limite en tant que mesure. Dans la section suivante, on va établir un bon cadre topologique pour étudier ces objets, et on va introduire certaines de ses propriétés. On aurait pu considérer d'autres types de représentations sous forme de mesures, par exemple pour une permutation σ de taille n on aurait pu construire des poids de Dirac $\frac{1}{n}$ sur tous les $(\frac{i}{n}, \frac{\sigma(i)}{n})_{i \in [1;n]}$. Cette correspondance aurait plus ou moins les mêmes propriétés (elle définirait les mêmes limites), mais l'un des avantages de la construction proposée est que les lois marginales des mesures μ_σ sont des lois uniformes sur $[0, 1]$, propriété qui est stable par passage à la limite (pour la convergence faible). Ceci est une des raisons d'être de la construction proposée.

On notera \mathbb{M}_U^1 l'ensemble des mesures de probabilités de $[0, 1]^2$ à marginales uniformes muni de la topologie faible. On appellera permuton ses éléments. Dans la suite, on montrera qu'on ne peut pas réduire cet espace (tout élément de \mathbb{M}_U^1 peut être construit comme limite de mesure de permutation). Il nous sera utile de remarquer que \mathbb{M}_U^1 peut être métrisé, on peut par exemple utiliser la distance de Lévy-Prokhorov. La stabilité des marginales uniformes par passage à la limite permet de voir que \mathbb{M}_U^1 est compact. On appellera \mathbb{M}_U^1 l'espace des permutons.

Notre objectif est l'étude de la convergence en faible dans cet espace. Une étude directe dans l'ensemble des fonctions continues étant déraisonnable, on va réduire le problème à quelques observables qui seront particulièrement adaptées au cas des permutations et qui nous permettront de définir une distance simple pour la convergence en faible.

1.2 Motifs de permutation et de permutons

Il nous faut une notion de proximité entre permutations. Mais à la différence des graphes qui peuvent être comparés par leur voisinage local, les permutations ont la caractéristique de mélanger extrêmement les points et il n'est pas commode, ni raisonnable, de comparer des permutations point par point. C'est la notion combinatoire de motif qui va nous permettre de comparer des permutations entre elles, et de savoir si elle sont semblables ou bien très différentes.

On commence par poser proprement la définition de motif dans le monde des permutations, puis on introduira un analogue sur l'espace des permutons. C'est cette notion de motif qui sera l'épine dorsale de ce mémoire.

Définition 1 (Motifs de permutation). *Étant donnée une permutation σ de taille n , pour toute partie A de $\llbracket 1; n \rrbracket$, σ définit une bijection de A vers $\sigma(A)$. Lorsqu'on réordonne les termes (de A et $\sigma(A)$) en les indexant de 1 à $\text{Card}(A)$ en préservant l'ordre, on obtient une permutation de taille le cardinal de A . On note cette permutation $\text{perm}(A, \sigma)$. On dira qu'une permutation π est un motif de σ s'il existe un ensemble d'entiers A tel que $\text{perm}(A, \sigma) = \pi$. On définit aussi $\tau(\pi, \sigma)$ comme étant la fréquence du motif π dans σ . Plus précisément :*

Si π et σ sont deux permutations de tailles respectives k et n ,

$$\tau(\pi, \sigma) = \frac{1}{\binom{n}{k}} \sum_{A, AC \llbracket 1; n \rrbracket} \mathbb{1}_{\text{perm}(A, \sigma) = \pi}$$

Remarquons que les uniques termes qui peuvent contribuer à la somme sont ceux associés à une partie de cardinal k . D'un point de vue probabiliste, $\tau(\pi, \sigma)$ est la probabilité d'avoir $\text{perm}(A, \sigma) = \pi$ lorsqu'on prend A un ensemble aléatoire de loi uniforme sur les parties à k éléments de $\llbracket 1; n \rrbracket$.

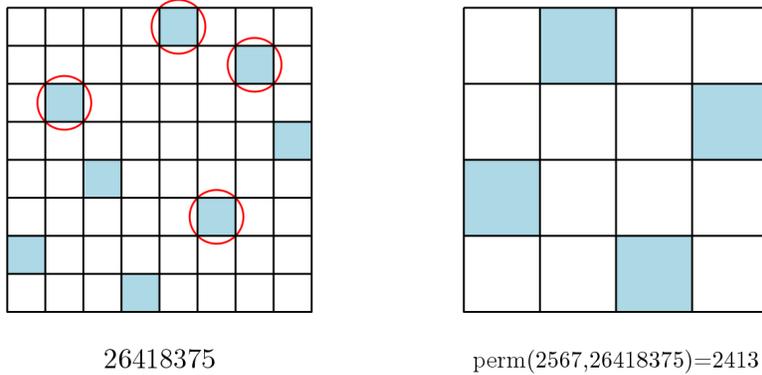


FIGURE 1.2

On s'inspire de cette définition combinatoire, pour la définition suivante :

Définition 2 (Motifs de permuton). *Soit k un entier positif, et soit z_1, \dots, z_k k points dans $[0; 1]^2$, tels que toutes leurs abscisses et ordonnées soient distinctes, on dira alors qu'ils sont en position générale. On note, pour i entier entre 1 et k , $z_{(i)}$ le point dans z_1, \dots, z_k ayant la i -ème plus petite abscisse, et q la projection dans l'axe des ordonnées. On construit la permutation de taille k $\text{Perm}(z_1, \dots, z_k)$*

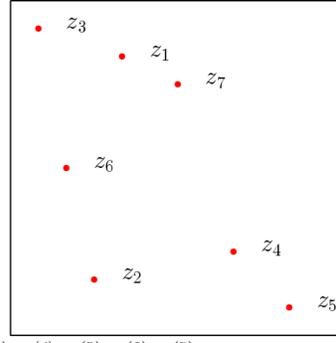
définie par :

$$\forall i \leq k, \text{Perm}(z_1, \dots, z_k)(i) = \text{Card}(\{j \leq k, q(z_j) \leq q(z_{(i)})\})$$

Pour π une permutation de taille k et μ un permuton, on pose :

$$\tau(\pi, \mu) = \mu^{k \otimes}(\{(z_1, \dots, z_k), \text{Perm}(z_1, \dots, z_k) = \pi\})$$

Lorsqu'on tire k points selon $\mu^{k \otimes}$ ils sont presque sûrement en position générale (marginales sans atomes). La définition est donc bien fondée. On parlera de fréquence du motif π dans μ .



$$(z^{(1)}, z^{(2)}, z^{(3)}, z^{(4)}, z^{(5)}, z^{(6)}, z^{(7)}) = (z_3, z_6, z_2, z_1, z_7, z_4, z_5)$$

$$\text{Perm}(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7) = 7426531$$

FIGURE 1.3

• Constatons que cette définition n'élargit pas celle de motif d'une permutation (étant donnée une permutation σ on a $\tau(\pi, \mu_\sigma) > 0$ pour toute permutation π alors qu'on peut avoir $\tau(\pi, \sigma) = 0$).

Cependant ces deux notions restent intimement liées. Le lemme suivant permet de contrôler la différence entre les deux :

Lemme. Soient σ et π deux permutations et notons n et k leurs tailles respectives. On fait l'hypothèse que $k < n$. On a l'inégalité suivante :

$$|\tau(\pi, \mu_\sigma) - \tau(\pi, \sigma)| \leq 2 \left(1 - \frac{1}{n^{k-1}} \prod_{i=1}^{k-1} (n-i)\right)$$

Démonstration. On reprend les notations du lemme et on considère (Z_1, \dots, Z_k) de loi $\mu_\sigma^{k \otimes}$. On a deux cas de figure possibles :

- (1) Tous les points $(Z_i)_{i \in \llbracket 1; k \rrbracket}$ tombent dans des sous-carrés différents du coloriage de σ .
- (2) Au moins deux points parmi $(Z_i)_{i \in \llbracket 1; k \rrbracket}$ tombent dans un même sous-carré.

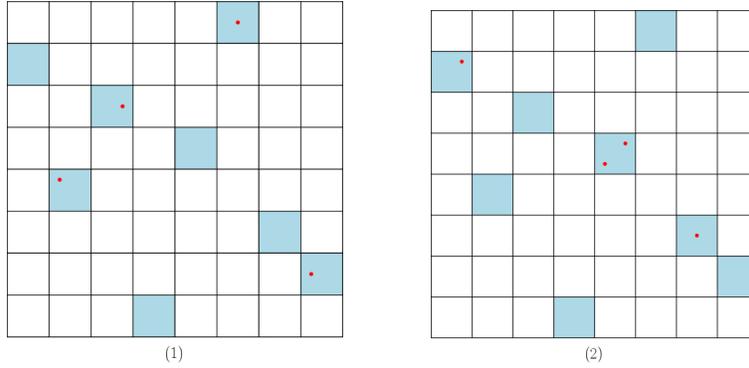


FIGURE 1.4 – Différentes configurations de points

On pose A_n l'événement (1), on a que :

$$\tau(\pi, \sigma) = \mathbb{P}(\text{Perm}(Z_1, \dots, Z_k) = \pi \mid A_n)$$

on peut donc faire la majoration brutale

$$|\tau(\pi, \sigma) - \tau(\pi, \mu_\sigma)| \leq 2(1 - \mathbb{P}(A_n))$$

Pour obtenir l'inégalité du lemme il suffit de remarquer que :

$$\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{n^{k-1}} \prod_{i=1}^{k-1} (n - i)$$

□

- Remarquons que pour k fixe le membre de droite de l'inégalité converge vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Donc pour π une permutation arbitraire et σ_n une suite de permutations dont la taille tend vers l'infini :

la convergence de la suite $(\tau(\pi, \sigma_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est équivalente à celle de $(\tau(\pi, \mu_{\sigma_n}))_{n \in \mathbb{N}^*}$

Cette remarque simple nous sera très utile par la suite. Elle nous permettra de passer d'une notion à l'autre selon les besoins lorsqu'on s'intéresse à des permutations de taille de plus en plus grande.

1.3 Convergence dans l'espace des permutons

On a introduit toutes les notations nécessaires pour étudier la convergence dans l'espace des permutons. Dans cette section, on va montrer que l'application qui à un permuton associe la liste des fréquences des motifs est continue et injective. Ceci nous permettra de réduire l'étude de la convergence dans l'espace

des permutons à celle des fréquences des motifs ainsi que de définir une métrique simple dans cet espace.

On note \mathfrak{S} l'ensemble des permutations et \mathfrak{S}_n l'ensemble des permutations de taille n .

On commence par montrer que l'espace des permutons est bien l'adhérence des mesures de permutations. La proposition suivante nous sera aussi utile pour montrer l'injectivité de l'application qui à un permuton associe la liste de la fréquence des motifs.

Proposition 1. *Soit μ un permuton, pour tout n entier non nul on considère une permutation aléatoire σ_n de même loi que $\text{Perm}(Z_1, \dots, Z_n)$ avec (Z_1, \dots, Z_n) de loi $\mu^{n \otimes}$. On a que :*

$$\mu_{\sigma_n} \text{ converge presque sûrement vers } \mu$$

- Constatons que cette proposition montre que l'espace des permuton est le bon espace à considérer pour étudier les limites de mesures de permutations. Ce résultat fut prouvé en 2013 par Hoppen, Kohayakawa, Moreira et Sampaio dans [4]. La preuve qu'on présente ici est moins précise, on n'a pas accès à la vitesse de convergence, mais à l'avantage d'être plus rapide et d'introduire moins de notations.

Démonstration. On commence par introduire certaines notions et notations.

Pour un permuton μ , on note F_μ la fonction caractéristique de μ :

$$\forall (x, y) \in [0; 1]^2, F_\mu(x, y) = \mu([0; x] \times [0, y])$$

Comme les permutons sont à marginales uniformes on peut appliquer le théorème de Portemanteau pour voir que la convergence faible dans \mathbb{M}_U^1 est équivalente à la convergence en norme infinie des fonctions de répartition. On déduit aussi à cause des marginales uniformes que la fonction de répartition d'un permuton est forcément continue. D'autre part, par définition elles sont croissantes (ici on comprend croissant dans le sens suivant : une fonction f de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} est croissante si pour tout $(a, b, c, d) \in [0, 1]^4$ tels que $a < c$ et $b < d$ on a $f(a, b) \leq f(c, d)$). Ceci nous permet de métriser naturellement la topologie de l'espace des permutons à l'aide de la distance, dist , définie par :

$$\forall (\mu, \nu) \in (\mathbb{M}_U^1)^2, \text{dist}(\mu, \nu) = \|F_\mu - F_\nu\|_\infty$$

Passons à la preuve du théorème.

On note p la projection dans l'axe des abscisses et q la projection dans l'axe des ordonnées. Soit μ un permuton et considérons un triangle de variables aléatoires $(Z_i^{(j)})_{0 < i \leq j}^{(i, j) \in \mathbb{N}^2}$ indépendantes et de loi μ .

On pose alors pour tout entier n non nul, $\gamma_n := \text{Perm}(Z_1^{(n)}, \dots, Z_n^{(n)})$.

Pour établir le théorème on va montrer que presque sûrement $F_{\mu_{\gamma_n}}$ converge vers F_μ en norme infinie. Ce qui nous permettra de conclure à l'aide du théorème de Borel-Cantelli. Comme les fonctions de répartitions associées aux permutons sont continues et croissantes, la densité des points à coordonnées rationnelles permet de réduire le problème à la preuve de :

Pour tout (x, y) dans $[0, 1]^2$, $F_{\mu_{\gamma_n}}(x, y)$ converge presque sûrement vers $F_\mu(x, y)$.

Prenons donc (x, y) arbitraires dans $[0, 1]^2$ et montrons la convergence presque sûre pour (x, y) . Pour cela, on va se servir de deux faits :

Fait 1 : La suite :

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{p(Z_i^{(n)}) < x, q(Z_i^{(n)}) < y} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$$

converge vers $F_\mu(x, y)$ lorsque n tend vers l'infini.

Pour le voir il suffit d'appliquer l'inégalité de Hoeffding. De manière plus explicite, pour tout δ réel strictement positif, on a :

$$\mathbb{P}\left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mathbb{1}_{p(Z_i^{(n)}) < x, q(Z_i^{(n)}) < y} - F_\mu(x, y)) \right| > \delta \right) \leq 2 \exp\left(-\frac{n}{2} \delta^2\right)$$

Ceci décrivant une suite sommable, le fait découle en appliquant le théorème de Borel-Cantelli.

Fait 2 : Soient $(U_i^{(j)})_{0 < i < j \in \mathbb{N}^2}$ des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$. Pour tout entier n non nul et tout $i \leq n$, on note $U_{(i)}^{(n)}$ la i -ème plus petite valeur dans $(U_l^{(n)})_{l \leq n}$. On a que presque sûrement :

Pour tout r dans $[0, 1]$, $U_{\lfloor nr \rfloor}^{(n)}$ converge vers r .

Encore une fois, la densité des rationnels permet de réduire l'étude de la convergence pour r arbitraire. Le fait découle alors de la convergence presque sûre des variables $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{U_i^{(n)} < r}$ vers r . Ceci peut être prouvé exactement de la même manière que le fait précédent en utilisant l'inégalité de Hoeffding et le théorème de Borel-Cantelli.

Utilisons maintenant ces deux faits pour conclure. Le fait 2 montre que les quantités $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{p(Z_i^{(n)}) < x, q(Z_i^{(n)}) < y}$ et $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\lfloor nx \rfloor} \mathbb{1}_{\gamma_n(i) < \lfloor ny \rfloor}$ sont asymptotiquement équivalentes. Mais par définition $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\lfloor nx \rfloor} \mathbb{1}_{\gamma_n(i) < \lfloor ny \rfloor}$ est asymptotiquement équi-

valent à $F_{\mu_{\gamma_n}}(x, y)$. Et donc d'après le fait 1, on a bien que $F_{\mu_{\gamma_n}}(x, y)$ converge presque sûrement vers $F_{\mu}(x, y)$.

Considérons maintenant une suite de permutations séparables σ_n comme dans l'énoncé de la proposition. Soit δ un réel strictement positif, on a :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}(\text{dist}(\mu_{\sigma_n}, \mu) > \delta) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}(\text{dist}(\mu_{\gamma_n}, \mu) > \delta) < +\infty$$

la dernière inégalité découlant du théorème de Borel-Cantelli puisque les variables γ_n sont indépendantes. En utilisant une dernière fois le théorème de Borel-Cantelli et la densité des rationnels, on déduit que :

Presque sûrement μ_{σ_n} converge faiblement vers μ_{σ} . □

On énonce maintenant le résultat principal de cette section :

Proposition 2. *L'application :*

$$\begin{aligned} V : \mathbb{M}_U^1 &\rightarrow [0; 1]^{\mathfrak{S}} \\ \mu &\mapsto (\tau(\pi, \mu))_{\pi \in \mathfrak{S}} \end{aligned}$$

est continue et injective (lorsque $[0; 1]^{\mathfrak{S}}$ est muni de la topologie produit).

Démonstration.

Preuve de la continuité :

On va montrer que si on considère une suite de permutons μ_n convergeant vers un permuton μ alors on a bien que $V(\mu_n)$ converge vers $V(\mu)$. Ceci suffit pour en déduire la continuité (l'espace des permutons est un espace topologique métrisable). Soit π une permutation fixe et notons k sa taille. On veut montrer que $\tau(\pi, \mu_n)$ converge vers $\tau(\pi, \mu)$, ce qui revient à dire que :

$$\mu_n^{k \otimes}(\{(z_1, \dots, z_k), \text{Perm}(z_1, \dots, z_k) = \pi\}) \rightarrow \mu^{k \otimes}(\{(z_1, \dots, z_k), \text{Perm}(z_1, \dots, z_k) = \pi\})$$

lorsque n tend vers l'infini.

Remarquons déjà que la convergence faible de μ_n vers μ entraîne celle de $\mu_n^{k \otimes}$ vers $\mu^{k \otimes}$. Pour conclure il suffit donc d'appliquer le théorème de Portemanteau puisque $\partial\{\text{Perm}(z_1, \dots, z_k) = \pi\}$ est contenu dans l'ensemble des k -uplets dont au moins deux des coordonnées ont la même abscisse ou la même ordonnée, et comme μ est à marginale uniforme on a bien :

$$\mu(\partial\{(z_1, \dots, z_k), \text{Perm}(z_1, \dots, z_k) = \pi\}) = 0$$

On a donc bien la convergence de $V(\mu_n)$ vers $V(\mu)$.

Preuve de l'injectivité :

Prenons ν_1 et ν_2 deux permutons. Comme dans la preuve de la proposition 1, prenons pour tout entier n non nul :

$$\sigma_n^{(1)} = \text{perm}(Z_1^{(1)}, \dots, Z_n^{(1)})$$

$$\sigma_n^{(2)} = \text{perm}(Z_1^{(2)}, \dots, Z_n^{(2)})$$

avec $(Z_1^{(1)}, \dots, Z_n^{(1)})$ de loi $\nu_1^{n \otimes}$ et $(Z_1^{(2)}, \dots, Z_n^{(2)})$ de loi $\nu_2^{n \otimes}$. La proposition 1 entraîne que presque sûrement $\mu_{\sigma_n^{(1)}}$ converge vers ν_1 et $\mu_{\sigma_n^{(2)}}$ converge vers ν_2 dans \mathbb{M}_U^1 .

Pour conclure remarquons que pour tout n non nul, la loi de $\sigma_n^{(1)}$ (resp. $\sigma_n^{(2)}$) ne dépend que de $V(\nu_1)$ (resp. $V(\nu_2)$). Donc si $V(\nu_1) = V(\nu_2)$ alors par unicité de la limite on a $\nu_1 = \nu_2$ (puisque les permutons ν_1 et ν_2 sont déterministes). \square

On va maintenant énoncer quelques conséquences directes de cette proposition nous permettant de simplifier considérablement l'étude de la convergence vague dans \mathbb{M}_U^1 .

Corollaire 1. *Soient μ un permuton et $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de permutons, on a équivalence lorsque n tend vers l'infini entre :*

- (1) μ_n converge vers μ
- (2) pour toute permutation π , $\tau(\pi, \mu_n)$ converge vers $\tau(\pi, \mu)$

Démonstration. Le fait que (1) implique (2) est équivalent à la continuité de la fonction V . Montrons l'implication inverse, considérons une suite de permutons $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle qu'il existe un permuton μ tel que :

$$\forall \pi \in \mathfrak{S}, \tau(\pi, \mu_n) \rightarrow \tau(\pi, \mu)$$

L'injectivité de V impose alors que μ est l'unique valeur d'adhérence possible pour la suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Mais comme l'espace des permutons est compact, on a bien que (2) implique (1) \square

L'espace des mesures de probabilité sur $[0; 1]^2$ peut être métrisé par exemple à l'aide de la distance de Lévy-Prohorov. On pourrait restreindre cette mesure à l'espace des permutons. Cependant le corollaire précédent nous permet d'introduire une distance de nature plus combinatoire mieux adaptée à notre étude :

Corollaire 2. *L'application d de $\mathbb{M}_U^1 \times \mathbb{M}_U^1$ dans \mathbb{R}_+ définie par :*

$$\forall (\mu, \nu) \in \mathbb{M}_U^2, d(\sigma_1, \sigma_2) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{2^n} \sup_{\pi \in \mathfrak{S}_n} |\tau(\pi, \mu) - \tau(\pi, \nu)|$$

réalise une distance et métrise la topologie de la convergence en faible dans l'espace des permutons.

- Il aurait été aussi possible de définir une distance inspirée du monde des graphons [9]. C'est d'ailleurs l'approche qu'on trouve dans la littérature sur les permutations aléatoires. Mais la distance ci-dessus a la vertu d'être plus simple tout en restant adaptée à notre étude.

Maintenant qu'on comprend mieux la nature topologique de l'espace des permutations, on peut s'intéresser à des variables aléatoires à valeurs dans cet espace. La proposition 3 de la section suivante nous donnera un cadre agréable pour étudier la convergence en loi de permutations aléatoires. Mais avant ça étudions un exemple afin d'utiliser les outils mis en place.

Exemple 1. *On considère pour tout entier n , une permutation aléatoire σ_n de loi uniforme sur \mathfrak{S}_n . On a que μ_{σ_n} converge en probabilité vers λ .*

Démonstration. Ceci découle directement du fait que σ_n a même loi que :

$$\text{Perm}(Z_1, \dots, Z_n) \text{ avec } (Z_1, \dots, Z_n) \text{ de loi } \lambda^{n \otimes}$$

et de la proposition 1. □

Le résultat s'élargit par inertie lorsqu'on prend des permutations aléatoires uniformes sur un ensemble de permutations suffisamment grand. Plus précisément :

Exemple 2. *Soit \mathcal{C} une partie de \mathfrak{S} et notons pour tout n entier non nul \mathcal{C}_n les éléments de \mathcal{C} de taille n . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on prend une permutation aléatoire σ_n de loi uniforme sur \mathcal{C}_n . Si*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Card}(\mathcal{C}_n)}{\text{Card}(\mathfrak{S}_n)} > 0$$

alors μ_{σ_n} converge presque sûrement vers λ

Démonstration. On prend pour tout n non nul, α_n une permutation aléatoire uniforme sur \mathfrak{S}_n et σ_n une permutation uniforme sur \mathcal{C}_n . On a que pour tout $\epsilon > 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(d(\mu_{\sigma_n}, \lambda) > \epsilon) &= \mathbb{P}(d(\mu_{\alpha_n}, \lambda) > \epsilon \mid \alpha_n \in \mathcal{C}_n) \\ &\leq \frac{\text{Card}(\mathfrak{S}_n)}{\text{Card}(\mathcal{C}_n)} \mathbb{P}(d(\mu_{\alpha_n}, \lambda) > \epsilon) \end{aligned}$$

Si on fait l'hypothèse que $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Card}(\mathcal{C}_n)}{\text{Card}(\mathfrak{S}_n)} > 0$, alors d'après l'exemple 1 et par Borel-Cantelli, on a que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(d(\mu_{\alpha_n}, \lambda) > \epsilon) < +\infty$$

Le résultat en découle. □

•Remarquons que plusieurs classes de permutations classiques vérifient cette propriété, citons par exemple les dérangements ou le groupe alterné. Ici on a eu accès à des convergence presque sûre grâce à la proposition 1. Cependant ce genre de résultats reste rare. Par la suite on s'intéressera à la convergence en loi.

1.4 Convergence en loi et Classes évitantes

On voit donc que pour sortir du cadre de la mesure uniforme sur $[0; 1]^2$, il faudra s'intéresser à des classes combinatoires \mathcal{C} relativement petites par rapport à \mathfrak{S} (voir exemple 2). En combinatoire, parmi les classes les plus étudiées on trouve les classes évitant certains motifs. Plus précisément, pour un ensemble de permutations R , on note $Av(R)$ (pour avoiding) l'ensemble des permutations σ telles que pour tout π dans R , $\tau(\pi, \sigma) = 0$. Les permutons définissent un bon cadre pour l'étude de telles permutations. Ces classes sont étudiées en partie puisqu'elles constituent une porte d'entrée à l'étude de permutations avec des fréquences fixes, le cas avoiding étant le plus simple à traiter puisque c'est le plus extrême. Récemment il y a eu une montée d'intérêt dans l'étude des limites de telles classes (voir [5, 13, 2, 3])

La problématique est la suivante, on considère un ensemble de permutations R et pour tout entier n non nul, on prend une permutation aléatoire σ_n tirée de manière uniforme sur $Av(R)_n$:

μ_{σ_n} converge-t-il ?

Donnons quelques exemples. Par définition $Av(12)$ donne comme permuton limite la mesure de Lebesgue sur la droite $(x, 1 - x)_{x \in [0; 1]}$, respectivement $Av(21)$ donne la mesure de Lebesgue sur la diagonale opposée, i.e $(x, x)_{x \in [0; 1]}$. Le cas évitant une permutation de taille 3 est d'une complexité bien supérieure. Dans [14] Miner et Pak décrivent certaines propriétés asymptotiques de ces permutations par une approche combinatoire. Plus récemment Hoffman, Rizzolo et Slivken [2, 3] ont étudié le cas évitant une permutation de taille 3 à l'aide de la connexion entre ces permutations et l'excursion brownienne. Ceci leur a permis d'obtenir des résultats combinatoires profonds avec une approche plus probabiliste. Notre démarche s'inscrit dans cette pente.

Toutes ces classes ont la particularité d'avoir un permuton limite déterministe. Dans la suite de ce mémoire on s'intéresse au cas des permutations dites séparables, i.e $Av(2413, 3142)$, notre point d'appui est l'article [5], où les auteurs montrent la convergence en loi vers un permuton aléatoire. Avant cela, on va introduire un analogue de la proposition 1 lorsqu'on s'intéresse à la convergence en loi de permutons aléatoires, ainsi qu'un calcul de la dimension de Hausdorff du support d'un permuton évitant un motif arbitraire.

Afin d'étudier la convergence en loi de variables aléatoires à valeurs \mathbb{M}_U^1 , on veut comprendre l'espace des fonctions continue allant de \mathbb{M}_U^1 à valeurs réelles qu'on notera par la suite $\mathcal{C}(\mathbb{M}_U^1, \mathbb{R})$. Constatons déjà que d'après la proposition 2, pour toute permutation π l'application qui à tout permuton μ associe $\tau(\pi, \mu)$ appartient à $\mathcal{C}(\mathbb{M}_U^1, \mathbb{R})$. Le lemme suivant montre que tout élément de $\mathcal{C}(\mathbb{M}_U^1, \mathbb{R})$ peut être approché arbitrairement bien, pour la norme infinie, à l'aide des fonctions $(\tau(\pi, \cdot))_{\pi \in \mathfrak{S}}$:

Lemme. *L'algèbre engendrée par les fonctions $(\tau(\pi, \cdot))_{\pi \in \mathfrak{S}}$ est dense dans $\mathcal{C}(\mathbb{M}_U^1, \mathbb{R})$ pour la norme infinie.*

Démonstration. Ceci est une conséquence de la proposition 2. L'injectivité de la fonction V implique que la famille $(\tau(\pi, \cdot))_{\pi \in \mathfrak{S}}$ sépare les points de \mathbb{M}_U^1 . De plus pour tout permuton μ on a nécessairement $\tau(12, \mu) > 0$ ou $\tau(21, \mu) > 0$ (voir définition 2). L'espace des permutons étant compact, le lemme découle du théorème de Stone-Weierstrass. \square

On est maintenant en mesure de montrer l'équivalence suivante :

Proposition 3. *Soit $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et μ des permutons aléatoires. On a que μ_n converge en loi vers μ , lorsque n tend vers l'infini, si et seulement si pour toute permutation π :*

$$\mathbb{E}[\tau(\pi, \mu_n)] \rightarrow \mathbb{E}[\tau(\pi, \mu)]$$

lorsque n tend vers l'infini.

Démonstration. Commençons par le sens direct.

Si μ_n converge en loi vers μ on peut appliquer le théorème de Skorohod et supposer que μ_n converge presque sûrement vers μ . La proposition 1 montre alors que presque sûrement pour toute permutation π , $\tau(\pi, \mu_n)$ converge vers $\tau(\pi, \mu)$. Comme les fréquences des motifs prennent des valeurs dans $[0; 1]$ par convergence dominée on obtient le résultat désiré.

Montrons l'implication inverse.

D'après le corollaire 1, il suffit de montrer que la convergence pour toute permutation π :

$$\mathbb{E}[\tau(\pi, \mu_n)] \rightarrow \mathbb{E}[\tau(\pi, \mu)]$$

entraîne :

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^k \tau(\pi_i, \mu_n)\right] \rightarrow \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^k \tau(\pi_i, \mu)\right]$$

lorsque n tend vers l'infini, pour tout entier k et tout k -uplet de permutations (π_1, \dots, π_k) .

Considérons ν un permuton, k un entier et π_1, \dots, π_k des permutations. Notons l_i la taille de π_i et $L = \sum_{i=1}^k l_i$. Prenons aussi (Z_1, \dots, Z_L) de loi $\nu^{L \otimes}$. Pour

alléger un peu les équations, on pose aussi $L_i = \sum_{j=1}^{i-1} l_j$. On a que :

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^k \tau(\pi_i, \nu) &= \prod_{i=1}^k \mathbb{P}(\text{perm}(Z_{L_i+1}, \dots, Z_{L_{i+1}}) = \pi_i) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_L} \mathbb{P}(\{\text{perm}(Z_1, \dots, Z_L) = \sigma\} \cap \bigcap_{i=1}^k \{\text{perm}(Z_{L_i+1}, \dots, Z_{L_{i+1}}) = \pi_i\}) \end{aligned}$$

Notons $d(\pi_1, \dots, \pi_k, \sigma)$ le nombre de partitions de $\llbracket 1; L \rrbracket$ en k parties A_1, \dots, A_k telles que $\text{perm}(A_i, \sigma) = \pi_i$ pour i dans $\llbracket 1; k \rrbracket$.

On pose :

$$c(\pi_1, \dots, \pi_k, \sigma) = \frac{d(\pi_1, \dots, \pi_k, \sigma)}{\binom{L}{l_1, \dots, l_k}}$$

qui est la probabilité d'avoir $\bigcap_{i=1}^k \{\text{perm}(Z_{L_i+1}, \dots, Z_{L_{i+1}}) = \pi_i\}$ sachant que $\{\text{perm}(Z_1, \dots, Z_L) = \sigma\}$ est réalisé.

Pour le voir, on pose p la projection sur l'axe des abscisses et α la permutation de taille L définie par :

$$\forall i \in \llbracket 1; L \rrbracket, \alpha(i) = \text{Card}(\{j, p(Z_j) \leq p(Z_i)\})$$

Comme les variables $(Z_i)_{i \in \llbracket 1; L \rrbracket}$ sont indépendantes et de même loi, sur l'événement $\{\text{perm}(Z_1, \dots, Z_L) = \sigma\}$, α est de loi uniforme sur \mathfrak{S}_L . La probabilité d'avoir $\bigcap_{i=1}^k \{\text{perm}(Z_{L_i+1}, \dots, Z_{L_{i+1}}) = \pi_i\}$ sachant $\{\text{perm}(Z_1, \dots, Z_L) = \sigma\}$ est donc bien $c(\pi_1, \dots, \pi_k, \sigma)$.

On obtient alors la formule suivante :

$$\prod_{i=1}^k \tau(\pi_i, \nu) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_L} c(\pi_1, \dots, \pi_k, \sigma) \tau(\sigma, \nu)$$

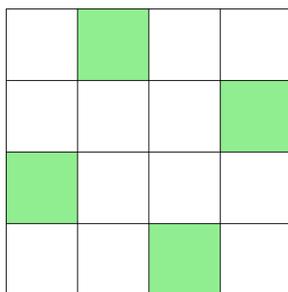
On a donc bien que μ_n converge en loi vers μ . □

On passe maintenant à l'étude de la dimension de Hausdorff, on a le résultat général suivant :

Proposition 4. *Soit μ un permuton évitant une permutation π , c'est-à-dire $\tau(\pi, \mu) = 0$, alors la dimension de Hausdorff de son support est 1.*

Démonstration. Commençons par montrer que sa dimension de Hausdorff est forcément supérieure à 1, ceci restant vrai pour tout permuton. Notons F le support de μ , et notons $p(F)$ sa projection sur l'axe des abscisses. Comme μ est à marginales uniformes, $p(F)$ est forcément dense dans $[0; 1]$ et comme $p(F)$ est fermé, on a directement $p(F) = [0; 1]$. Et donc la dimension de Hausdorff de F est supérieure à 1.

Montrons maintenant qu'elle ne peut pas être supérieure à 1. Commençons par illustrer l'idée : supposons par exemple que $\tau(2413, \mu) = 0$, ceci se traduit par le fait que si on lance quatre points de manière indépendante selon μ ils ne peuvent pas décrire la permutation 2413. Si on découpe le carré $[0; 1]^2$ comme dans la figure ci-dessous, on remarque qu'au moins un des sous-carrés colorés ne peut pas être chargé par μ (ici les frontières ne jouent aucun rôle puisque μ est à marginales uniformes).



Si on considère le découpage précédent, on peut itérer le même raisonnement à chaque sous-carré chargé par μ (ce qui permet déjà de voir que la dimension de Hausdorff de F est strictement inférieure à 2).

Revenons au cas général, on prend π une permutation de taille k , la question qu'on veut résoudre est : étant donné un quadrillage de $[0; 1]^2$ régulier en n^2 sous-carrés (comme dans la définition 1), quel est le nombre maximal de carrés qui peuvent être chargés par μ ?

On note $N(\pi, n)$ ce nombre. Dans [1] Marcus et Tardos montrent que

$$N(\pi, n) \leq C(k)n$$

avec $C(k)$ une constante qui ne dépend que de k . On renvoie à leur article pour l'élégante et rapide preuve de ce résultat combinatoire (leur résultat est énoncé dans le cadre de l'étude des matrices mais il s'adapte immédiatement à notre problème). On a donc que F peut être recouvert par $C(k)n$ carrés de diamètre $\frac{\sqrt{2}}{n}$. Ce qui entraîne que sa dimension de Hausdorff est nécessairement inférieure ou égale à 1. \square

On se lance maintenant dans l'étude spécifique des permutations séparables, i.e $\text{Av}(\{2413; 3124\})$. On commence par faire une étude combinatoire, on va voir comment passer de manière bijective de ces permutations à des arbres étiquetés, qui vont pouvoir être construits à travers des arbres de Galton-Watson. Cette construction nous donnera accès aux résultats limites sur les arbres. Ceci sera exploité en profondeur dans la troisième partie. Cette démarche est assez représentative de la coopération entre combinatoire et probabilités.

Partie 2

Permutations séparables

On commence cette section par la construction d'une bijection entre la classe des permutations séparables, i.e $\text{Av}(2413, 3142)$, et un certain type d'arbres étiquetés. On présente la preuve par souci de complétude, mais surtout parce qu'elle permet d'avoir une idée plus intuitive de la nature de ces permutations ainsi que de leur comportement.

Définition 3 (Opérations sur les permutations). *On définit deux opérations \oplus et \ominus sur \mathfrak{S} , de la manière suivante :*

Pour tout couple d'entiers (k_1, k_2) et deux permutations π_1 de taille k_1 et π_2 de taille k_2 , on écrit $\pi_1 \oplus \pi_2$ pour la permutation vérifiant :

$$\pi_1 \oplus \pi_2(i) = \begin{cases} \pi_1(i) & \text{si } i \leq k_1 \\ \pi_2(i - k_1) + k_1 & \text{si } k_1 < i \end{cases}$$

L'opération \ominus est définie de manière analogue :

$$\pi_1 \ominus \pi_2(i) = \begin{cases} \pi_1(i) + k_2 & \text{si } i \leq k_1 \\ \pi_2(i - k_1) & \text{si } k_1 < i \end{cases}$$

• Remarquons que si on applique ces opérations à des permutations séparables, le résultat est aussi une permutation séparable.

Dans la théorie des permutations on dit qu'une permutation π est simple s'il n'existe pas deux permutations π_1 et π_2 telles que $\pi = \pi_1 \oplus \pi_2$ ou $\pi = \pi_1 \ominus \pi_2$. Les permutations simples jouent un rôle analogue pour le couple d'opérations (\oplus, \ominus) que celui des nombres premiers pour la multiplication (toute permutation peut s'écrire, par définition, en utilisant les opérations $(\oplus$ et $\ominus)$ et des permutations simples). Notre bijection permettra de montrer que $\text{Av}(2413, 3142)$ est le plus petit ensemble de permutations contenant la permutation 1 et stable par les opérations \oplus et \ominus . Les permutations séparables prennent ainsi un nouvel intérêt. En fait, certains des objets qu'on va être amené à définir pour étudier les permutations séparables peuvent être généralisés à des classes de permutations plus générales, la décomposition en arbre de Schröder étant l'une d'entre elles.

2.1 Une bijection

On commence par introduire les mots de Schröder ainsi que la structure d'arbre binaire associée.

Définition 4 (Mots de Schröder). *On se donne trois symboles \oplus , \ominus et 1 . On s'intéresse aux mots formés par ces symboles et les deux parenthèses (et). On considère \mathcal{P} le plus petit ensemble de mots vérifiant :*

- (1) $1 \in \mathcal{P}$
- (2) $\forall A, B \in \mathcal{P}, (A \oplus B) \in \mathcal{P}$ et $(A \ominus B) \in \mathcal{P}$

Étant donné un mot A dans \mathcal{P} , on peut construire un arbre binaire étiqueté avec ces trois symboles de manière récursive :

Si $A = 1$ alors on construit l'arbre réduit à une racine avec étiquette 1 .

Sinon il existe deux mots B et C dans \mathcal{P} tels que $A = (B \oplus C)$ ou $A = (B \ominus C)$. Supposons que A s'écrive $(B \oplus C)$ (resp. $B \ominus C$), on construit alors l'arbre dont la racine a pour étiquette \oplus (resp. \ominus), le sous arbre issu du le fils gauche est l'arbre construit à partir de B et le sous arbre issu du fils droit est celui construit à partir du mot C .

On définit les mots de Schröder comme étant les mots de \mathcal{P} ne contenant pas à l'intérieur des motifs de la forme $A \oplus (B \oplus C)$ ou $A \ominus (B \ominus C)$ avec A, B, C trois mots dans \mathcal{P} . Les arbres associés aux mots de Schröder sont les arbres vérifiant que pour tout nœud interne son étiquette diffère de celle de son fils droit. On parlera d'arbres binaires bien étiquetés.

• Remarquons que les nœuds avec étiquette 1 sont les feuilles de l'arbre. Cette structure nous permet de voir les étiquettes 1 comme les entrées, et les symboles \oplus et \ominus comme étant deux opérations.

Plus formellement on utilise l'algorithme récursif suivant :

Algorithme 1 (Des arbres aux permutations). *On prend un arbre binaire étiqueté \mathbf{T} :*

Si \mathbf{T} est réduit à une racine d'étiquette 1 , alors on associe la permutation 1 .

Sinon on considère \mathbf{T}_1 le sous-arbre issu du fils gauche de la racine et \mathbf{T}_2 celui issu du fils droit. On construit π_1 la permutation codée par \mathbf{T}_1 et π_2 celle codée par \mathbf{T}_2 . Si la racine contient l'étiquette \oplus (resp. \ominus) alors on renvoie la permutation $\pi_1 \oplus \pi_2$ (resp. $\pi_1 \ominus \pi_2$)

Cette correspondance n'est malheureusement pas injective, par exemple les arbres associés à $(1 \oplus 1) \oplus 1$ et à $1 \oplus (1 \oplus 1)$ codent tous les deux la permutation 123. Mais par définition, si on se restreint aux arbres binaires bien étiquetés cette construction est bien injective. On présente maintenant un algorithme nous permettant de faire le chemin inverse, i.e de passer des permutations séparables aux arbres binaires bien étiquetés. Ce deuxième algorithme a la vertu de définir un inverse de l'algorithme précédent (réduit sur les arbres binaires bien étiquetés) :

Algorithme 2 (Des permutations aux arbres). *Soient n un entier non nul et π une permutation séparable de taille n , on définit n blocs (mots constitués d'entiers, parenthèses et les deux symboles \oplus, \ominus) B_1, \dots, B_n avec $B_i = \pi(i)$. On lit les blocs de gauche à droite, dès qu'on trouve un entier i tel que B_i et B_{i+1} contiennent des entiers consécutifs a_i dans B_i et a_{i+1} dans B_{i+1} . Si $a_{i+1} > a_i$ on réunit les deux blocs en écrivant $(B_i \oplus B_{i+1})$ puis on renumérote les blocs en préservant l'ordre, sinon on fait de même mais en construisant le bloc $(B_i \ominus B_{i+1})$. On continue jusqu'à ne plus avoir qu'un seul bloc. Puis on remplace les entiers de 1 à n par le symbole 1 dans le bloc final, on retrouve ainsi un mot de Schröder. Puis on renvoi l'arbre binaire bien étiqueté.*

Avant de nous lancer dans la preuve, on donne un exemple :

Permutation : $\pi = 21365478$

Étape 1 : $\{B_1 = 2; B_2 = 1; B_3 = 3; B_4 = 6; B_5 = 5; B_6 = 4; B_7 = 7; B_8 = 8\}$

Étape 2 : $\{B_1 = (2 \ominus 1); B_2 = 3; B_3 = 6; B_4 = 5; B_5 = 4; B_6 = 7; B_7 = 8\}$

Étape 3 : $\{B_1 = ((2 \ominus 1) \oplus 3); B_2 = 6; B_3 = 5; B_4 = 4; B_5 = 7; B_6 = 8\}$

Étape 4 : $\{B_1 = ((2 \ominus 1) \oplus 3); B_2 = (6 \ominus 5); B_3 = 4; B_4 = 7; B_5 = 8\}$

Étape 5 : $\{B_1 = ((2 \ominus 1) \oplus 3); B_2 = ((6 \ominus 5) \ominus 4); B_3 = 7; B_4 = 8\}$

Étape 6 : $\{B_1 = (((2 \ominus 1) \oplus 3) \oplus ((6 \ominus 5) \ominus 4)); B_2 = 7; B_3 = 8\}$

Étape 7 : $\{B_1 = (((((2 \ominus 1) \oplus 3) \oplus ((6 \ominus 5) \ominus 4)) \oplus 7); B_2 = 8\}$

Étape 8 : $\{B_1 = ((((((2 \ominus 1) \oplus 3) \oplus ((6 \ominus 5) \ominus 4)) \oplus 7) \oplus 8)\}$

Étape 9 : $\{B_1 = ((((((1 \ominus 1) \oplus 1) \oplus ((1 \ominus 1) \ominus 1)) \oplus 1) \oplus 1)\}$

Mot de Schröder : $(((((1 \ominus 1) \oplus 1) \oplus ((1 \ominus 1) \ominus 1)) \oplus 1) \oplus 1)$

On plonge dans la preuve, on reprend les idées de Fu, Lin et Zeng [12].

Démonstration. Il faut montrer que l'algorithme ne bloque pas lorsque la permutation de départ est séparable, la nature bijective en découle rapidement.

Remarquons déjà, que lorsqu'on considère j blocs B_1, \dots, B_j obtenus en appliquant l'algorithme on peut définir une permutation de la manière suivante :

- Pour tout $i \leq j$, on note b_i le plus petit entier dans l'écriture de B_i
- On construit la permutation π dans \mathfrak{S}_j définie par :

$$\forall i \leq j, \pi(i) = \text{Card}\{k, b_k \leq b_i\}$$

Notons que par construction, les entiers dans un même bloc sont forcément consécutifs, le choix du minimum est donc tout à fait arbitraire : n'importe quel autre choix donnerait la même permutation π . Notons aussi que lorsque les blocs sont construits à partir d'une permutation séparable alors la permutation π obtenue est aussi séparable. Pour montrer que l'algorithme ne s'arrête pas il suffit donc de montrer que pour toute permutation séparable σ , on peut trouver un entier j tel que $\sigma(j)$ et $\sigma(j+1)$ soient des entiers consécutifs (algorithme prenant à chaque fois le plus petit entier j vérifiant cette propriété).

On raisonne par récurrence sur la taille afin de montrer l'existence d'un tel j . Il n'y a aucun problème pour la permutation de taille 1. Prenons n un entier ($n > 1$) et supposons le résultat pour tout entier strictement inférieur à n . Soit σ une permutation séparable de taille n :

-Si $\sigma(1) = 1$ ou $\sigma(1) = n$, on peut revenir au cas $n - 1$ en considérant la permutation séparable construite à partir des valeurs $\sigma(i)$ pour $i > 1$ (en réordonnant les termes et en conservant l'ordre).

-Si ce n'est pas le cas, on considère s l'entier vérifiant $\sigma(s) = 1$. Supposons aussi que $\sigma(s-1) < \sigma(s+1)$ (le cas inverse se traite de manière symétrique). On prend m entier vérifiant

- (1) $m \leq s - 1$ et $\sigma(s-1) \leq \sigma(m) < \sigma(s+1)$
- (2) pour tout k vérifiant (1), on a $\sigma(k) \leq \sigma(m)$

Comme σ est une permutation séparable par définition elle évite les motifs 2413 et 3142. On a donc que pour tout entier k : si $\sigma(k) < \sigma(m)$ alors $k < s$. Et s'il existe un entier r tel que :

$$r < m \text{ et } \sigma(r) > \sigma(m)$$

alors il ne peut pas y avoir d'entier k vérifiant $k < r$ et $\sigma(k) < \sigma(m)$. L'image réciproque par σ de $[[1; \sigma(m)]]$ est donc un intervalle d'entiers. σ définit donc une permutation séparable sur cet intervalle de taille strictement inférieur à n et supérieur à 2. Par hypothèse de récurrence, on a donc bien l'existence d'un j , strictement inférieur à n , tel que $\sigma(j)$ et $\sigma(j+1)$ soient des entiers consécutifs.

On laisse en exercice la vérification que cet algorithme définit bien un inverse de l'algorithme précédent restreint aux arbres binaires bien étiquetés. \square

On expose maintenant quelques résultats simples sur les permutations séparables afin de mieux comprendre leurs régularités et leurs singularités. On remarque que la bijection précédente permet d'avoir facilement accès au nombre de descentes (qui sera le nombre de \ominus dans l'arbre), on va donc recueillir un résultat asymptotique sur la proportion des descentes, qui montrera que dans un certain sens les permutations séparables sont très régulières. Puis on introduira la notion d'arbre de Schröder et d'arbre de Schröder bien étiqueté, leur avantage étant de simplifier les contraintes sur les étiquettes.

Proposition 5. *Soit n un entier non nul, et σ une permutation de taille n . On note $d(\sigma)$ la proportion de descentes, formellement :*

$$\frac{1}{n-1} \text{Card}(\{0 < i < n, \sigma(i) > \sigma(i+1)\})$$

On considère σ_n une permutation tirée de manière uniforme dans l'ensemble des permutations séparables de taille n .

Alors :

$d(\sigma_n)$ tend presque sûrement vers $\frac{1}{2}$ lorsque n tend vers l'infini.

Le même résultat en découle pour la proportion de montées (qui correspond à $1 - d(\sigma_n)$).

Démonstration. On va regarder σ_n à travers sa décomposition en arbre binaire bien étiqueté (voir preuve de la bijection) qu'on note \mathbf{T}_n . Étant donnée une telle décomposition, on remarque que par construction le nombre de descentes (resp. de montées) est le nombre d'étiquettes \ominus (resp. \oplus).

On décompose un arbre binaire bien étiqueté, \mathbf{T} , en branches de manière récursive :

On commence avec \mathcal{B} étant l'ensemble vide :

-Si \mathbf{T} n'est constitué que de la racine alors on garde \mathbf{T} dans \mathcal{B} , celui-ci devenant $\{\mathbf{T}\}$.

-Sinon, on considère le chemin allant de la racine vers le père de la feuille la plus à droite. On enlève cette branche et on la garde dans \mathcal{B} , on efface aussi les arêtes connectées à cette branche ainsi que la feuille la plus à droite. On obtient ainsi une forêt d'arbres binaires bien étiquetés plus petits puis on itère le même procédé. Le résultat final \mathcal{B} est un ensemble de branches.

On parlera de décomposition de \mathbf{T} en branches. La figure 2.1 donne un exemple d'une telle décomposition.

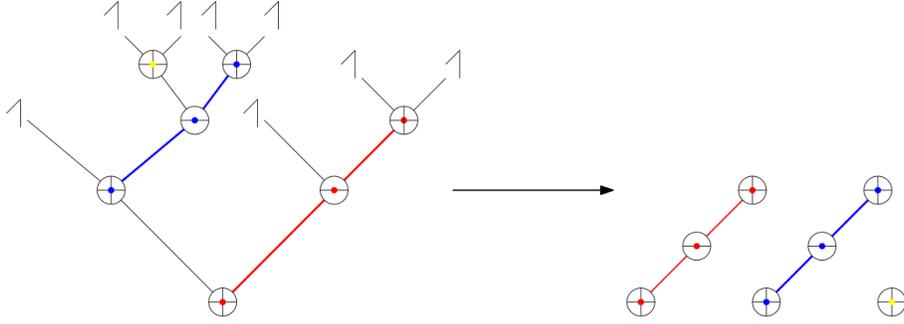


FIGURE 2.1 – Exemple de décomposition en branches d'un arbre

On note N_{\ominus} (resp. N_{\oplus}) le nombre d'étiquettes \ominus (resp. \oplus) de \mathbf{T}_n , on a :

$$d(\sigma_n) = \frac{1}{n-1} N_{\ominus}$$

On pose $a(\mathbf{T}_n) = \frac{1}{n-1} |N_{\oplus} - N_{\ominus}|$. Remarquons que pour montrer le résultat voulu il suffit de montrer que $a(\mathbf{T}_n)$ converge presque sûrement vers 0.

On considère la décomposition en branches de \mathbf{T}_n , notons que sur chaque branche de la décomposition les étiquettes \ominus et \oplus alternent (notion de bon étiquetage). Dans chacune de ces branches le nombre de \oplus et \ominus ne peut différer que de un (lorsque la branche contient un nombre impair de nœuds et que l'excès suivra l'étiquette du premier nœud). Finalement, on notera $\text{forme}(\mathbf{T})$ l'arbre binaire obtenu en effaçant toutes les étiquettes et pour tout entier n , \mathcal{T}_n l'ensemble des arbres binaires sans étiquettes à n feuilles.

Soit $\delta > 0$

$$\mathbb{P}(a(\mathbf{T}_n) > \delta) = \sum_{t \in \mathcal{T}_n} \mathbb{P}(a(\mathbf{T}_n) > \delta \mid \text{forme}(\mathbf{T}_n) = t) \mathbb{P}(\text{forme}(\mathbf{T}_n) = t)$$

Une fois la structure d'arbre binaire donnée, l'étiquette initiale de chaque branche (de la décomposition précédente) suit des variables de Rademacher (1 associé à \oplus et -1 associé à \ominus) indépendantes de paramètre $\frac{1}{2}$. Si on note $r(\mathbf{T}_n)$ le nombre de branches de taille impaire, on a que conditionnellement à la forme de \mathbf{T}_n , $a(\mathbf{T}_n)$ est de même loi que

$$\frac{1}{n-1} \left| \sum_{i=0}^{r(\mathbf{T}_n)} X_i \right|$$

avec X_i des variables indépendantes de Rademacher de paramètre $\frac{1}{2}$. Puisque $r(\mathbf{T}_n) \leq n$, à l'aide de l'inégalité de Hoeffding on obtient :

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n} \left| \sum_{i=0}^{r(\mathbf{T}_n)} X_i \right| > \delta\right) \leq 2 \exp\left(-\frac{n\delta^2}{2}\right)$$

Ce qui permet de conclure par Borel-Cantelli que $a(\mathbf{T}_n)$ converge presque sûrement vers 0. \square

2.2 Arbres de Schröder

Le problème des arbres binaires bien étiquetés est que la structure de leurs étiquettes n'est pas forcément commode à manipuler. C'est pour cela qu'on introduit les arbres de Schröder qui ont la vertu de répartir les étiquettes de manière bien plus simple. Ceci nous donnera accès à des résultats de cardinalité, mais cela sera aussi la porte d'entrée pour obtenir des objets limites.

Définition 5 (Arbres de Schröder). *Pour n entier non nul, on note \mathcal{S}_n l'ensemble des arbres à n feuilles dont les nœuds internes ont au moins deux fils. On les appelle arbres de Schröder. Comme pour les arbres binaires, on peut étiqueter leurs nœuds internes avec les symboles \oplus ou \ominus et les feuilles avec étiquette 1. On les appellera arbres de Schröder étiquetés. On dit qu'un arbre de Schröder est bien étiqueté s'il vérifie en plus la contrainte :*

Tout fils a une étiquette différente de celle du père.

- Remarquons que toutes les étiquettes d'un arbre de Schröder bien étiqueté sont assujetties à l'étiquette de la racine, les nœuds internes à distance paire partageant la même étiquette que la racine et ceux à distance impaire possédant l'autre opération.

On élargit l'algorithme 1 aux arbres de Schröder étiquetés :

Définition 6. *On pose ϕ l'application allant des arbres de Schröder à étiquettes dans les permutations séparables, définie récursivement de la manière suivante :*

On prend \mathbf{T} un arbre de Schröder à étiquettes :

-Si \mathbf{T} est réduit à sa racine de symbole 1 alors $\phi(\mathbf{T})$ est la permutation 1.

-Sinon notons k le nombre de fils de la racine, et $\mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_k$ les sous-arbres de ses fils numérotés de gauche à droite. Si la racine a pour étiquette \oplus , alors on pose $\phi(\mathbf{T}) = \phi(\mathbf{T}_1) \oplus \phi(\mathbf{T}_2) \dots \oplus \phi(\mathbf{T}_k)$.

Si l'étiquette est \ominus , on pose de manière symétrique $\phi(\mathbf{T}) = \phi(\mathbf{T}_1) \ominus \phi(\mathbf{T}_2) \dots \ominus \phi(\mathbf{T}_k)$.

Ici on n'a pas besoin d'introduire les parenthèses puisqu'il n'y pas d'ambiguïté possible.

- Remarquons qu'à un arbre binaire bien étiqueté on peut lui associer de manière bijective un arbre de Schröder bien étiqueté de la manière suivante :

On parcourt le contour de l'arbre binaire bien étiqueté de gauche à droite. Dès qu'on tombe sur un fils qui a la même étiquette que son père, on l'efface (le fils) puis on connecte ses enfants directement au père. On obtient ainsi un arbre de Schröder (de plus les deux arbres ont la même image par ϕ)

On a vu dans la section précédente que la fonction ϕ définit une bijection allant des arbres binaires bien étiquetés dans les permutations séparables donc elle réalise aussi une bijection des arbres de Schröder bien étiquetés dans les permutations séparables. L'intérêt principale de cette deuxième bijection est la simplicité de la répartition des étiquettes des arbres de Schröder bien étiquetés (il suffit de connaître l'étiquette de la racine).

Pour n entier non nul, ϕ crée une correspondance entre les arbres de Schröder bien étiquetés à n feuilles et les permutations séparables de taille n . On va donc s'intéresser par la suite à l'étude de ces arbres pris de manière uniforme (pour un nombre de feuilles donné). On va montrer qu'ils peuvent être construits à l'aide d'arbres de Galton-Watson conditionnés par le nombre de feuilles (on aura aussi besoin d'une variable de Rademacher indépendante pour choisir l'étiquette de la racine). L'avantage d'une telle approche est qu'on aura accès à toute la technologie des arbres de Galton-Watson pour étudier les permutations séparables. Mais avant, expliquons comment avoir accès aux fréquences de motifs à travers les arbres de Schröder étiquetés.

Définition 7 (Arbre engendré par des feuilles). *Soit T un arbre de Schröder, tout ensemble \mathcal{F} de feuilles de T induit un arbre de Schröder, qu'on note $\text{arb}(\mathcal{F}, T)$, défini de la manière suivante :*

- (1) *Les feuilles de $\text{arb}(\mathcal{F}, T)$ sont les éléments de \mathcal{F} .*
- (2) *Les nœuds internes de $\text{arb}(\mathcal{F}, T)$ sont les derniers ancêtres communs de deux feuilles de \mathcal{F} .*
- (3) *La relation père-fils est héritée de celle de T .*
- (4) *L'ordre entre les fils d'un nœud interne de $\text{arb}(\mathcal{F}, T)$ est hérité de T .*

De même si on se donne un arbre de Schröder étiqueté, \mathbf{T} , on définit $\text{arb}(\mathcal{F}, \mathbf{T})$ en demandant en plus :

- (5) *Les étiquettes des nœuds sont les mêmes que celles dans \mathbf{T} .*

La figure 2.2 est un exemple d'une telle construction.

Cette définition est l'analogue pour les arbres de la fonction perm pour les permutations. Pour passer de l'une à l'autre remarquons que si l'on prend \mathbf{T} codant une permutation σ de taille n , et si l'on numérote les feuilles de gauche à droite de 1 à n , on obtient que pour toute partie A de $\llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\text{perm}(A, \sigma) = \phi(\text{arb}(A, \mathbf{T}))$$

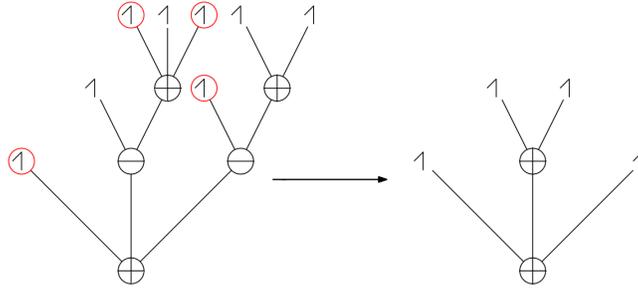


FIGURE 2.2 – Exemple d'arbre engendré par des feuilles

où l'on confond ici les entiers avec les feuilles.

On notera par la suite pour toute permutation σ , $S(\sigma)$ l'ensemble des arbres de Schröder étiquetés codant σ .

Si on se donne une permutation σ et un arbre de Schröder, \mathbf{T} dans $S(\sigma)$, alors pour π , permutation de taille k :

La fréquence de π dans σ est la probabilité lorsqu'on prend un ensemble \mathcal{F} de k feuilles de \mathbf{T} de manière uniforme (sur les ensembles de k feuilles) d'avoir $\phi(\text{arb}(\mathcal{F}, \mathbf{T})) = \pi$. La structure d'arbre étiqueté est donc particulièrement consistante avec la notion de motif.

2.3 Résultats combinatoires

Remarquons que comme les étiquettes d'un arbre de Schröder bien étiqueté sont complètement déterminées par l'étiquette de la racine, pour passer de T_n à un arbre de Schröder bien étiqueté de taille n uniforme il suffit de lancer une variable de Rademacher de paramètre $\frac{1}{2}$, si le résultat est 1 on rajoute l'étiquette \oplus à la racine et si le résultat est -1 on rajoute l'étiquette \ominus . C'est pour cette raison que dans un premier temps on fait abstraction des étiquettes.

Dans cette optique, notons par la suite T_n un arbre aléatoire de loi uniforme dans \mathcal{S}_n pour n entier non nul.

Proposition 6. *On considère γ la mesure de probabilité sur \mathbb{N} , définie par :*

$$\gamma(0) = 2 - \sqrt{2}$$

$$\forall k > 1, \gamma(k) = \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right)^{k-1}$$

T_n a même loi qu'un arbre de Galton-Watson de loi de reproduction γ conditionné à avoir n feuilles.

Démonstration. Soit t un arbre de Galton-Watson de loi de reproduction γ . On considère n un entier non nul et T un arbre de Schröder arbitraire à n feuilles. On note f le nombre de feuilles de T , \mathcal{I} l'ensemble de ses nœuds internes. On pose aussi pour tout nœud v de T , $\text{deg}(v)$ le nombre de fils de v . On utilisant ces notations, on a que :

$$\mathbb{P}(t = T) = (2 - \sqrt{2})^f \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right)^{\sum_{v \in \mathcal{I}} (\text{deg}(v) - 1)}$$

Or on a la relation combinatoire :

$$\sum_{v \in \mathcal{I}} (\text{deg}(v) - 1) = f - 1$$

qu'on peut prouver de manière simple par récurrence sur le nombre de nœuds.

D'où :

$$\mathbb{P}(t = T) = (2 - \sqrt{2})^f \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right)^{f-1}$$

qui ne dépend que du nombre de feuilles. On a donc bien que T_n a même loi que t conditionné à avoir n feuilles. \square

• On aurait pu introduire une loi autre que γ , mais celle-ci a le bon goût d'être la seule loi de reproduction critique permettant de simuler les arbres T_n en conditionnant par le nombre de feuilles. Ceci est plus commode pour nous, puisque la plupart des résultats limites sont construits pour de telles lois. Voici quelques applications directes :

Application. On note G la série formelle $G(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n z^n$, avec a_n le nombre d'arbres de Schröder à n feuilles. On pose aussi pour n entier strictement positif, c_n le nombre de permutations séparables de taille n .

(1) On a :

$$G(z) = \frac{1 + z - \sqrt{1 - 6z + z^2}}{4}$$

pour z complexe de module strictement inférieur à $3 - 2\sqrt{2}$

(2) $c_n \underset{+\infty}{\sim} C n^{-\frac{3}{2}} (3 - 2\sqrt{2})^{-n}$, avec C une constante positive

(3) T_n converge, en tant que graphe, vers un arbre de Kesten de loi de reproduction γ lorsque n tend vers l'infini.

On éclaircit ce qu'on entend par arbre de Kesten. Soit α une loi de reproduction critique, on note $\bar{\alpha}$ la mesure de probabilité définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \bar{\alpha}(k) = k\alpha(k)$$

On appelle arbre de Kesten de loi de reproduction α , l'arbre généalogique infini construit par deux types de nœuds : les normaux, se reproduisant selon α , et les mutants, selon $\bar{\alpha}$, les reproductions étant toutes indépendantes. De plus tous les fils d'un nœud normal sont normaux, par contre un nœud mutant choisit uniformément un de ses fils qui sera mutant, de manière indépendante du reste des variables, les autres fils se reproduisant selon α . La dernière condition étant que la racine se reproduise selon $\bar{\alpha}$. Ceci définit bien un arbre infini, puisque la loi $\bar{\alpha}$ ne charge pas 0.

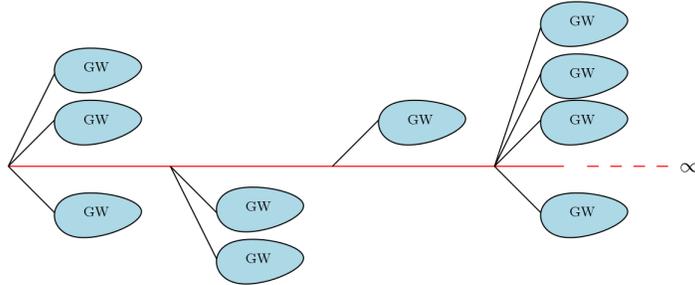


FIGURE 2.3 – Illustration d'un arbre de Kesten

Démonstration. (1) découle directement du fait que G vérifie l'équation :

$$G(z) = z + \sum_{k=2}^{+\infty} G(z)^k$$

Il suffit de la résoudre pour obtenir (1).

(2) se déduit du fait que tout arbre de Schröder est la donnée de l'étiquette de sa racine et de sa forme en tant qu'arbre. On a donc que la série formelle des c_n est $2G$. Mais en appliquant du théorème de transfert des séries entières (pour ce type de résultat sur les séries formelles voir [6]) dans (1) on obtient directement l'équivalence voulue.

Montrons finalement (3) : on considère T un arbre de Galton-Watson de loi γ , et on pose f la fonction qui à un arbre associe son nombre de feuilles.

Dans [11], Abraham et Delmas prouvent que pour montrer la convergence vers l'arbre de Kesten il suffit d'établir que $\mathbb{P}(f(T) = n) \underset{+\infty}{\sim} \mathbb{P}(f(T) = n + 1)$. On pourrait attaquer ce problème à l'aide de la marche de Lukasiewicz d'un arbre de Galton-Watson (voir définition 13), puis en exploitant le fait que c'est une marche skip-free. Cependant ici on privilégie une preuve tenant compte de la spécificité de la loi γ .

On utilise le fait que pour tout entier strictement positif n , la loi de T conditionné à avoir n feuilles suit une loi uniforme sur les arbres à n feuilles. On note

t_n l'arbre formé d'une racine connectée à n feuilles. Alors on a :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{P}(f(T) = n)}{\mathbb{P}(f(T) = n + 1)} &= \frac{\mathbb{P}(f(T) = n)}{\mathbb{P}(T = t_n)} \frac{\mathbb{P}(T = t_{n+1})}{\mathbb{P}(F(T) = n + 1)} \frac{\mathbb{P}(T = t_n)}{\mathbb{P}(T = t_{n+1})} \\ &= \frac{c_n}{c_{n+1}} \frac{\gamma(n)}{\gamma(0)\gamma(n+1)} \\ &= \frac{c_n}{c_{n+1}} \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Qui d'après (2) tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini. \square

• On a ici une première structure limite, un arbre de Schröder bien étiqueté (si on veut rester strictement dans les définitions usuelles dans le contexte des graphes on peut coder l'opération \oplus par une boucle) tend en tant que graphe vers un arbre de Kesten de loi de reproduction γ étiqueté de la manière suivante :

- (1) Les feuilles ont pour étiquette 1
- (2) Pour déterminer l'étiquette de la racine, on lance une variable aléatoire de Rademacher de paramètre $\frac{1}{2}$ de manière indépendante de la structure de l'arbre.
- (3) Les nœuds internes ont pour étiquette \oplus ou \ominus , en suivant la règle que aucun fils ne peut avoir la même étiquette que son père.

Malheureusement ceci n'est pas adapté à l'étude de la fréquence des motifs (on ne peut pas lancer des points aux hasard de manière uniforme). On a par contre accès à des propriétés sur les valeurs extrêmes. On remarque par exemple que si on prend σ_n une permutation aléatoire prise de manière uniforme sur l'ensemble des permutations séparables de taille n alors on a que :

$$\frac{\sigma_n(1)}{n} \text{ converge en loi vers une variable de Bernoulli de paramètre } \frac{1}{2}$$

pour le voir, on pose \mathbf{T}_n l'arbre de Schröder bien étiqueté associé à σ_n . Quitte à utiliser le théorème de Skorohod on peut supposer que \mathbf{T}_n converge presque sûrement en tant que graphe vers un arbre de Kesten étiqueté comme dans le paragraphe précédent. On se place sur l'arbre de Kesten étiqueté et on parcourt en descendant le (plus court) chemin allant de sa feuille la plus à gauche vers sa racine jusqu'à atteindre un sommet mutant. Si l'étiquette de ce sommet est \oplus (resp. \ominus) alors $\frac{\sigma_n(1)}{n}$ converge vers 0 (resp. vers 1). Comme l'étiquette de la racine est donnée par une variable de Rademacher de paramètre $\frac{1}{2}$ indépendante de la forme de l'arbre et que le reste des étiquettes alternent en fonction de la parité de la distance à la racine on a bien que σ_n converge en loi vers une Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. Constatons qu'on obtient le même résultat pour $\frac{\sigma_n(k)}{n}$ et $\frac{\sigma_n(n-k)}{n}$ pour tout k entier non nul.

De la même manière on peut déduire des résultats plus fins sur les extrêmes. Donnons un exemple :

$$\mathbb{P}(\sigma_n(1) = 1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 3 - 2\sqrt{2}$$

Où comme précédemment σ_n suit une loi uniforme sur les permutations séparables de taille n .

Expliquons brièvement pourquoi. On reprend \mathbf{T}_n l'arbre de Schröder bien étiqueté associé à σ_n . Pour avoir $\sigma_n(1) = 1$ il faut que la racine de \mathbf{T}_n ait pour étiquette \oplus et que son fils le plus à gauche soit une feuille. En passant à la limite, on obtient le résultat voulu.

- Remarquons que, à la différence des nombres de descentes, ici ces comportements sont très différents de celui d'une permutation typique (prise de manière uniforme). En fait l'arbre de Kesten nous montre que pour n grand, σ_n a tendance à envoyer les entiers proches de 1 et n vers les extrêmes.

Dans la partie suivante on va introduire un autre objet limite, qui va jouer le rôle opposé. On va perdre les détails, mais il nous éclaircira sur le comportement global et notamment il nous donnera accès à la fréquence des motifs.

Partie 3

Limite des permutations séparables

On commence l'étude à proprement parler de la limite des permutations séparables. On va scinder l'étude en deux problèmes plus simples à étudier. On commencera par l'étude de la structure d'arbre. L'idée est de s'appuyer sur la correspondance avec les arbres de Galton-Watson et de s'intéresser à la fonction contour afin d'utiliser des résultats classiques de convergence. On présente ici une approche totalement inspirée de [10]. De manière informelle la fonction contour des arbres bien normalisée converge, lorsque le nombre de feuille croît, vers une excursion brownienne. Une fois cette convergence établie, on s'attaquera à la distribution des étiquettes.

Dans la section suivante, on va introduire les notations et outils nécessaires à l'étude de la convergence ainsi que pour construire le permuton limite.

3.1 Fonction contour et extraction d'arbres

Par la suite pour un arbre T , on notera $\#T$ le nombre de sommets de T et $|T|$ le nombre de feuilles. On commence par introduire certaines définitions et notations générales dans le contexte des arbres. Il sera d'ailleurs utile de définir des analogues dans le cas étiqueté.

Définition 8 (Fonction contour d'un arbre). *Soit T un arbre plan, afin de visualiser sa fonction de contour on le plonge dans le plan de manière à ce que chacune de ses arêtes soit de longueur 1, puis on imagine une particule le parcourant à vitesse 1 de gauche à droite en partant de la racine et de manière continue. Le temps nécessaire pour parcourir T complètement est $2(\#T - 1)$. Sa fonction contour, notée C_T , est la fonction qui pour $t \leq 2(\#T - 1)$ vaut la distance (dans l'arbre) entre la racine et la particule, et pour $t > 2(\#T - 1)$ elle vaut 0.*

On introduit la normalisation suivante :
 Pour T un arbre, on note \bar{C}_T la fonction :

$$\bar{C}_T : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{|T|}} C_T(2(\#T - 1)x)$$

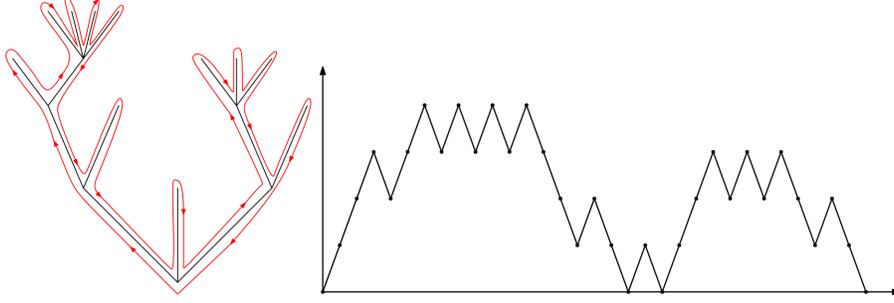


FIGURE 3.1 – Un arbre et sa fonction contour

• Remarquons que pour un arbre donné T , les maxima locaux de sa fonction contour C_T correspondent aux feuilles de T . Ici compte tenu de la nature de notre problème, on a normalisé par le nombre de feuilles. On aurait aussi pu utiliser la normalisation par le nombre de nœuds qui est plus classique. En fait, le rapport entre le nombre de feuilles et le nombre de nœuds converge vers une constante (en l'occurrence vers $\alpha(0)$) lorsque l'une des deux valeurs tend vers l'infini. Ce changement n'a donc pas une grande influence.

Il nous sera aussi utile d'introduire un autre codage bien connu d'un arbre, sa fonction hauteur.

Définition 9 (Fonction hauteur d'un arbre). *Pour un arbre plan T , on note $v_0, \dots, v_{\#T-1}$ ses nœuds par ordre d'apparition lorsqu'on parcourt son contour de gauche à droite. On considère la suite $(H_k)_{k \in [0; \#T-1]}$, où H_k correspond à la hauteur de v_k . On note H_T la fonction continue allant de $[0; \#T]$ dans les réels, coïncidant avec la suite $(H_k)_{k \in [0; \#T-1]}$ sur les entiers et étant affine entre deux entiers. On l'appelle la fonction hauteur de T .*

On construit aussi la normalisation \bar{H}_T définie par :

$$\bar{H}_T : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{|T|}} H_T((\#T - 1)x)$$

On donne l'exemple de la fonction hauteur de l'arbre de la figure 3.1 :

On introduit un analogue des fonctions de contour pour les arbres étiquetés.

la même étiquette. Il nous faut maintenant une manière de passer des contours étiquetés aux motifs, comme dans le cas des arbres de Schröder. Pour cela on commence par expliquer comment extraire d'une excursion étiquetée des arbres de Schröder.

Avant toute chose on pose pour toute excursion g et (x, y) dans $[0, 1]^2$:

$$m_g(x, y) = \inf_{t \in [x \wedge y; x \vee y]} g(t)$$

On énonce la construction pour les excursions étiquetées. Le cas non étiqueté se déduit directement de celui-ci.

Définition 11 (Extraction d'arbres d'une excursion).

Soit (g, s) une excursion étiquetée. Lorsqu'on prend p points $t_1 < t_2 < \dots < t_p$ dans $[0; 1]$, tels que pour tout $i \in \llbracket 1; p-1 \rrbracket$, $m_g(t_i, t_{i+1})$ ne soit pas atteint ni en t_i ni en t_{i+1} , alors on définit par récurrence un arbre de Schröder étiqueté, noté $\theta^{(S)}(g; (t_1, \dots, t_p))$ de la manière suivante :

Si $p = 1$, $\theta^{(S)}(g, s, t_1)$ est l'arbre qui n'est constitué que d'une racine d'étiquette 1.

Si $p > 1$, il existe $k \in \llbracket 1; p-1 \rrbracket$ et k entiers $i_1 < \dots < i_k$, dans $\llbracket 1; p-1 \rrbracket$, tels que

$$m_g(t_i, t_{i+1}) = m_g(t_1, t_p)$$

si et seulement si $i \in \{i_1, \dots, i_k\}$.

On pose $i_0 = 0$ et $i_{k+1} = p$, et on prend r dans $[t_1; t_p]$ réalisant $m_g(t_1, t_p)$ $\theta^{(S)}(g, s, (t_1, \dots, t_p))$ est l'arbre défini par :

-La racine a $k+1$ fils et a pour étiquette $s(r)$.

-Pour tout l dans $\{1, \dots, k+1\}$, l'arbre issu du l -ème fils de la racine (en comptant de gauche à droite) est l'arbre $\theta^{(S)}(g, (t_{i_{l-1}+1}, \dots, t_{i_l}))$.

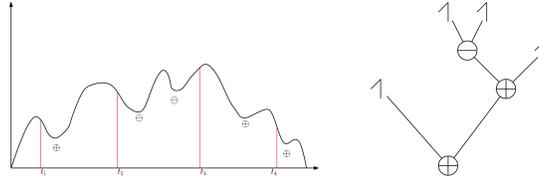


FIGURE 3.4 – Un exemple d'extraction d'un arbre

Afin d'assouplir un peu les notations, on élargit la définition de $\theta^{(S)}(g, s, (t_1, \dots, t_p))$ pour (t_1, \dots, t_p) quelconque en renvoyant l'arbre racine d'étiquette 1 s'ils ne sont pas tous distincts ou s'il existe i dans $\llbracket 1; p-1 \rrbracket$, tel que $m_g(t_i, t_{i+1})$ est atteint

en t_i ou t_{i+1} , sinon on définit $\theta^{(S)}(g, s, (t_1, \dots, t_p))$ comme l'arbre associé au p-uplet (t_1, \dots, t_p) une fois ordonné.

Pour le cas sans étiquette, on posera pour tout (t_1, \dots, t_p) dans $[0, 1]^p$

$$\theta(g, (t_1, \dots, t_p)) = \text{forme}(\theta^{(S)}(g, s, (t_1, \dots, t_p)))$$

où s est la fonction constante égale à \oplus . Ceci correspond à la définition des lois finies dimensionnelles pour les arbres codés par une excursion (voir [7]).

• Remarquons que les arbres construits à partir de $\theta^{(S)}$ ne sont pas forcément bien étiquetés. Constatons aussi que cette construction est bien consistante avec les définitions précédentes puisque le fait de prendre k feuilles dans un arbre de Schröder et de construire le sous-arbre associé est équivalent au fait de prendre les points correspondant à ces feuilles dans sa fonction de contour étiquetée puis de construire l'arbre associé à ces points à travers $\theta^{(S)}$. Cela motive la construction suivante :

Définition 12.

Cas sans étiquettes :

On se donne une excursion g et une mesure de probabilité w sur le segment $[0; 1]$. Pour tout k dans \mathbb{N}^* , on pose $Tree_{(k,w,g)}$ la mesure de probabilité sur les arbres plans définie par :

$$Tree_{(k,w,g)}(T) = w^{k\otimes}(\{(x_1, \dots, x_k), \theta(g, (x_1, \dots, x_k)) = T\})$$

Où T est un arbre plan quelconque.

Cas avec étiquettes :

On se donne une excursion étiquetée (g, s) et une mesure de probabilité, w , sur le segment $[0; 1]$.

Alors pour tout k dans \mathbb{N}^* , on pose $Tree_{(k,g,s)}^{(S)}$ la mesure de probabilité sur les arbres de Schröder étiquetés définie par :

$$Tree_{(k,w,g,s)}^{(S)}(\mathbf{T}) = w^{k\otimes}(\{(x_1, \dots, x_k), \theta^{(S)}(g, s, (x_1, \dots, x_k)) = \mathbf{T}\})$$

Pour \mathbf{T} un arbre de Schröder à étiquettes.

Étant donnée une excursion étiquetée et une mesure de probabilité sur $[0, 1]$, on peut extraire des arbres de Schröder étiquetés à l'aide des mesures $Tree^{(S)}$. Ceci nous permet donc de construire des permutations séparables en utilisant la fonction ϕ . On va maintenant présenter une construction qui fera le passage des excursions étiquetées (munies d'une bonne mesure de probabilité) aux permutons.

Définition 13 (Bonne mesure de probabilité pour une excursion étiquetée). Soit (g, s) une excursion étiquetée et soit w une mesure de probabilité sur $[0, 1]$. On dit que w est une bonne mesure pour (g, s) si lorsqu'on considère (X_1, X_2) une variable aléatoire selon $w^{2\otimes}$, alors presque sûrement le minimum de g sur $[X_1 \wedge X_2, X_1 \vee X_2]$ n'est pas atteint ni en X_1 ni en X_2 . On appellera un tel triplet (w, g, s) une excursion de Schröder.

• Remarquons qu'étant donnée une excursion de Schröder (w, g, s) pour tout entier non nul k , la mesure $Tree_{(k,w,g,s)}^{(S)}$ ne charge que les arbres de Schröder étiquetés à k feuilles. Cela nous pousse à introduire la fonction $\Lambda_{(w,g,s)}$ définie de \mathfrak{S} dans $[0, 1]$ de la manière suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall \pi \in \mathfrak{S}_k, \Lambda_{(w,g,s)}(\pi) = \sum_{\mathbf{T} \in S(\pi)} Tree_{(k,w,g,s)}^{(S)}(\mathbf{T})$$

Où l'on rappelle que pour toute permutation π , $S(\pi)$ désigne l'ensemble des arbres de Schröder étiquetés codant π .

D'un point de vue probabiliste, pour une permutation π (de taille k), $\Lambda_{(w,g,s)}(\pi)$ est la probabilité lorsqu'on lance k points indépendants selon w que l'arbre associé code π .

On va maintenant construire un permuton tel que la fréquence de ses motifs soit donnée par $(\Lambda_{(w,g,s)}(\pi))_{\pi \in \mathfrak{S}}$. On parlera de permuton associé à une excursion de Schröder. Constatons que la notion d'excursion de Schröder a des grandes limitations. Remarquons par exemple qu'elle n'est pas adaptée pour l'étude des contours étiquetés lorsque w est une loi uniforme sur la position des feuilles (on peut tomber plusieurs fois sur la même feuille). C'est un problème analogue à celui rencontré entre les motifs d'un permuton et ceux d'une permutation. Mais comme on le verra plus tard, cette construction a la vertu de nous donner un cadre agréable, et relativement souple, pour définir l'objet limite des permutations séparables.

Proposition 7 (Permuton d'une excursion étiquetée). Soit (w, g, s) une excursion de Schröder, et notons F^{\leftarrow} la fonction quantile de w (l'inverse à droite de la fonction de répartition de w). On pose $G_{(w,g,s)}$ la fonction définie pour tout x dans $[0, 1]$ par :

$$G_{(w,g,s)}(x) := \int_{[0,1]} h_{(w,g,s)}(x, y) w(dy)$$

où $h_{(w,g,s)}$ est la fonction définie pour (x, y) dans $[0, 1]$ par :

$$h_{(w,g,s)}(x, y) = \begin{cases} \mathbb{1}_{\phi(\theta^{(S)})(g,s,(F^{\leftarrow}(x),y))=12} & \text{si } y \leq F^{\leftarrow}(x) \\ \mathbb{1}_{\phi(\theta^{(S)})(g,s,(F^{\leftarrow}(x),y))=21} & \text{si } y > F^{\leftarrow}(x) \end{cases}$$

Notons $\mu_{(w,g,s)}$ la loi de $(X, G_{(w,g,s)}(X))$ où X est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. Alors $\mu_{(w,g,s)}$ est un permuton et pour toute permutation π :

$$\tau(\pi, \mu_{(w,g,s)}) = \Lambda_{(w,g,s)}(\pi)$$

On parlera de permuton associé à une excursion de Schröder.

• Constatons que pour x ne réalisant pas un minimum local pour g , $G_{w,g,s}(x)$ est la probabilité lorsqu'on lance une variable Y selon w que l'étiquette du minimum entre $F^{\leftarrow}(x)$ et Y soit \oplus lorsque $Y \leq F^{\leftarrow}(x)$ et \ominus sinon.

Démonstration. Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$. Et posons pour tout entier i non nul, $Y_i = F^{\leftarrow}(X_i)$. La famille $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une liste de variables indépendantes de loi w . Pour tout n entier non nul et tout i entier dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, on note $X_{(i)}^{(n)}$ la i -ème plus petite valeur dans l'ensemble $\{X_i, i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$. De la même manière, on notera $Y_{(i)}^{(n)} = F^{\leftarrow}(X_{(i)}^{(n)})$.

Par définition (voir remarque ci-dessus), on a presque sûrement $G_{(w,g,s)}(X_{(1)}^{(2)}) \leq G_{(w,g,s)}(X_{(2)}^{(2)})$ (resp. $G_{(w,g,s)}(X_{(1)}^{(2)}) \geq G_{(w,g,s)}(X_{(2)}^{(2)})$) dès que l'étiquette associée au minimum de g dans $[Y_{(1)}^{(2)}, Y_{(2)}^{(2)}]$ est \oplus (resp. \ominus). On rappelle que comme w est une bonne mesure pour (g, s) , presque sûrement le minimum de g n'est donc pas atteint ni en Y_1 ni Y_2 .

Comme on a affaire à un nombre dénombrable de variables aléatoires on peut supposer que pour tout (i, j) couple d'entiers non nuls le minimum pour g entre les points Y_i et Y_j n'est réalisé en aucun de ces deux points et que $G_{(w,g,s)}(X_i \wedge X_j) \geq G_{(w,g,s)}(X_i \vee X_j)$ (resp. $G_{(w,g,s)}(X_i \wedge X_j) \leq G_{(w,g,s)}(X_i \vee X_j)$) dès que l'étiquette associée au minimum de g sur $[Y_i \wedge Y_j, Y_i \vee Y_j]$ est \oplus (resp. \ominus).

Commençons par montrer que $G_{(w,g,s)}(X_1)$ suit une loi uniforme sur $[0, 1]$. Soit a dans $[0, 1]$ et montrons que $\mathbb{P}(G_{w,g,s}(X_1) < a) = a$.

Raisonnons par l'absurde, supposons par exemple que :

$$\mathbb{P}(G_{(w,g,s)}(X_1) < a) > a$$

le cas inférieur se traite de la même manière.

Notons A l'ensemble des x tel que $G_{(w,g,s)}(x) < a$ et considérons deux ensembles B et C inclus dans A tels que $\mathbb{P}(X_1 \in B) > a$ et $\mathbb{P}(X_1 \in C) > 0$ vérifiant :

$$\forall (b, c) \in B \times C, G_{(w,g,s)}(b) \leq G_{(w,g,s)}(c)$$

La mesurabilité des ensembles A , B et C ne pose pas de problème quitte à compléter la tribu de Lebesgue. On va montrer que les points de C ne peuvent pas être dans A (à un négligeable près).

On conditionne au fait que X_2 appartient à C (événement de probabilité non nul par hypothèse) alors si X_3 tombe dans B , on a forcément $G_{(w,g,s)}(X_3) \leq G_{(w,g,s)}(X_2)$ et donc l'étiquette associée au couple (Y_2, Y_3) est \oplus si $Y_2 \geq Y_3$ et \ominus sinon. Par définition on aurait alors $G_{(w,g,s)}(X_2) > a$. Ce qui nous donne la contradiction voulue. Le réel a étant arbitraire, on a bien que $G_{(w,g,s)}(X_1)$ suit une loi uniforme sur $[0, 1]$ et $\mu_{(w,g,s)}$ est donc un permuton.

Intéressons nous maintenant à la fréquences des motifs. Fixons k un entier non nul, par construction on a :

$$\text{Perm}((X_1, G_{(w,g,s)}(X_1)), \dots, (X_k, G_{(w,g,s)}(X_k))) = \phi(\theta^S(g, s, (Y_1, \dots, Y_k)))$$

Cette propriété de compatibilité nous donne donc pour toute permutation π de taille k :

$$\tau(\pi, \mu_{(w,g,s)}) = \Lambda_{(w,g,s)}(\pi)$$

□

Dans la suite de ce mémoire, on montrera que la limite des permutations séparables uniformes peut être représentée sous la forme $\mu_{(Leb, \mathbf{e}, \mathbf{s})}$, où Leb est la mesure de Lebesgue sur le segment $[0, 1]$, où \mathbf{e} est une excursion brownienne (de durée de vie 1) et \mathbf{s} est une fonction étiquetage qui à chaque minimum local de \mathbf{e} associe de manière équiprobable une étiquette dans $\{\oplus, \ominus\}$, ce choix s'opérant indépendamment des autres variables et des autres minima locaux.

3.2 Convergence du contour et des feuilles

Dans cette section, on considère une mesure de probabilité α sur \mathbb{N} de moyenne 1, et pour tout entier n strictement positif on notera T_n un arbre de Galton-Watson de loi de reproduction α conditionné à avoir n feuilles. On fait l'hypothèse supplémentaire que α admet un moment d'ordre deux fini. Notons que la mesure γ rentre bien dans ce cadre. Il sera commode dans la définition des fonctions Tree et $\text{Tree}^{(S)}$ de nous autoriser à confondre une mesure de probabilité avec sa fonction de répartition. Cette correspondance étant parfaite, elle ne pose pas de problème.

Le but de cette section est de montrer que pour tout entier fixe k , $\text{Tree}_{(k, F_n, \bar{C}_{T_n})}$ converge en loi vers $\text{Tree}_{(k, F, \mathbf{e})}$. Où F_n est la fonction répartition des feuilles de T_n , i.e. :

$$\forall x \in [0, 1], F_n(x) = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{f_k < x}$$

$f_1 < f_2 < \dots < f_n$ désignant les abscisses des feuilles dans \bar{C}_{T_n} . F désigne la fonction identité sur $[0, 1]$ (fonction répartition d'une loi uniforme), et \mathbf{e} une excursion brownienne de durée de vie 1. Toutes les excursions étant ici de durée de vie 1, on parlera directement d'excursion brownienne en omettant d'explicitier

leur durée de vie. On commence par montrer que F_n converge en probabilité vers F pour la norme infinie. Pour ce genre d'étude, il est plus simple de montrer le résultat pour la marche de Lukasiewicz, puis de l'élargir au cas de la fonction de contour.

Définition 14 (Marche de Lukasiewicz d'un arbre). *Étant donné un arbre T , on ordonne ses nœuds $v_0, \dots, v_{\#T-1}$ par ordre d'apparition lorsqu'on décrit le contour de T de gauche à droite. La marche de Lukasiewicz $W(T) = (W_l(T))_{l \in \llbracket 0; \#T \rrbracket}$ associée à T est définie par :*

$$W_0(T) = 0$$

$$\forall l \in \llbracket 0; \#T - 1 \rrbracket, W_{l+1}(T) = W_l(T) + k_{v_l} - 1$$

où l'on note pour v un nœud de T , k_v le nombre de fils de v .

La merveille des marches de Lukasiewicz est que lorsque l'on considère un arbre de Galton-Watson T de loi de reproduction α , alors $W(T)$ a même loi qu'une marche aléatoire $(S_l)_{l \in \mathbb{N}}$ partant de 0, et de loi des sauts :

$$\forall k \in \mathbb{N} \cup \{-1\}, \mathbb{P}(S_1 = k) = \alpha(k + 1)$$

arrêtée au premier moment où elle touche -1.

• Remarquons que les feuilles correspondent aux sauts de -1 dans la marche de Lukasiewicz. On introduit pour tout n entier strictement positif, la fonction aléatoire $S^{(n)}$ continue définie de $[0; \#T_n]$ dans \mathbb{R} coïncidant dans les entiers avec $W(T_n)$ et affine entre deux entiers.

De même que pour la fonction contour, on introduit la normalisation $\bar{S}^{(n)}$, définie par :

$$\begin{aligned} \bar{S}^{(n)} &: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{\sqrt{n}} S^{(n)}(\#T_n x) \end{aligned}$$

Pour tout n entier strictement positif, on pose $l_1 < l_2 < \dots < l_n$ les positions des feuilles dans $\bar{S}^{(n)}$. Pour simplifier les notations on pose aussi :

$$\begin{aligned} \bar{H}^{(n)} &= \bar{H}_{T_n} \\ \bar{C}^{(n)} &= \bar{C}_{T_n} \end{aligned}$$

La proposition suivante montre que les feuilles se répartissent de manière de plus en plus uniforme dans la marche de Lukasiewicz.

Proposition 8. *Pour tout n dans \mathbb{N}^* , on note G_n la fonction définie pour $x \in [0; 1]$:*

$$G_n(x) = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{l_k < x}$$

G_n converge presque sûrement vers F pour la norme uniforme (où l'on rappelle que pour tout x dans $[0, 1]$, $F(x) = x$).

Démonstration. On commence par réduire un peu le problème.

G_n et F sont des fonctions croissantes à valeurs dans $[0, 1]$ et F est continue. Il suffit donc de montrer pour n'importe quel x arbitraire que presque sûrement $G_n(x)$ converge vers $F(x)$, puisqu'on peut élargir le résultat pour la norme infinie en utilisant la densité des nombres rationnels.

Commençons la preuve :

On prend une marche aléatoire $(S_j)_{j \in \mathbb{N}}$ partant de 0 et de loi de sauts :

$$\forall k \in \mathbb{N} \cup \{-1\}, \mathbb{P}(S_1 = k) = \alpha(k + 1)$$

On pose τ_{-1} le premier temps d'atteinte de -1 et on introduit les temps d'arrêt $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définis par :

$$N_0 = 0$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, N_{k+1} = \inf\{j > N_k, S_j - S_{j-1} = -1\}$$

Ce sont les temps des sauts négatifs. Pour k entier positif, on peut écrire $N_k = \sum_{i=1}^k (N_i - N_{i-1})$. L'intérêt d'une telle écriture est que les variables aléatoires $(N_i - N_{i-1})_{i > 0}$ sont des variables géométriques (de paramètre de succès $\alpha(0)$) indépendantes et de même loi. Remarquons que pour tout n entier non nul la loi de $(S_j)_{j \leq \tau_{-1}}$ conditionnée à $\{\tau_{-1} = N_n\}$ coïncide avec celle de $W(T_n)$, notons aussi que pour tout i entier inférieur à n , on a la relation

$$l_i = \frac{N_i - 1}{N_n}$$

(toujours lorsque l'événement $\{\tau_{-1} = N_n\}$ est réalisé)

Comme on a toujours la relation $n \leq N_n$, il suffit de montrer que pour x arbitraire dans $]0; 1[$, $\frac{N_{\lfloor nx \rfloor}}{N_n}$ sachant $\{\tau_{-1} = N_n\}$ converge presque sûrement vers x . Pour cela on considère δ une constante positive et x dans $]0; 1[$. On va prouver que la suite

$$\left(\mathbb{P} \left(\left| \frac{N_{\lfloor nx \rfloor}}{\lfloor nx \rfloor} - \frac{1}{\alpha(0)} \right| \vee \left| \frac{N_n}{n} - \frac{1}{\alpha(0)} \right| > \delta \mid \tau_{-1} = N_n \right) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$$

est sommable. Ceci nous permettra de conclure à l'aide du théorème de Borel-Cantelli. Pour cela, on fait la majoration brutale :

$$\mathbb{P} \left(\left| \frac{N_{\lfloor nx \rfloor}}{\lfloor nx \rfloor} - \frac{1}{\alpha(0)} \right| \vee \left| \frac{N_n}{n} - \frac{1}{\alpha(0)} \right| > \delta \mid \tau_{-1} = N_n \right) \leq \frac{\mathbb{P} \left(\left| \frac{N_{\lfloor nx \rfloor}}{\lfloor nx \rfloor} - \frac{1}{\alpha(0)} \right| \vee \left| \frac{N_n}{n} - \frac{1}{\alpha(0)} \right| > \delta \right)}{\mathbf{P}(\tau_{-1} = N_n)}$$

Remarquons qu'on a déjà pour tout a dans $]0; 1[$ que $\frac{N_{\lfloor na \rfloor}}{\lfloor na \rfloor}$ converge presque sûrement vers $\frac{1}{\alpha(0)}$ (loi des grands nombres). Ici pour s'affranchir du conditionnement, on va utiliser le caractère géométrique des variables $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$. En

fait, en utilisant l'inégalité de Markov exponentielle, on obtient l'existence d'une constante c (strictement positive) telle que pour tout k entier non nul :

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{N_k}{k} - \frac{1}{\alpha(0)}\right| > \delta\right) \leq \exp(-ck)$$

On obtient alors l'existence d'une constante c_1 strictement positive telle que :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{N_{\lfloor nx \rfloor}}{\lfloor nx \rfloor} - \frac{1}{\alpha(0)}\right| \vee \left|\frac{N_n}{n} - \frac{1}{\alpha(0)}\right| > \delta\right) \leq \exp(-c_1 n)$$

Pour conclure on va montrer que l'ordre de grandeur de $\mathbb{P}(\tau_{-1} = N_n)$ est $n^{-\frac{3}{2}}$.

Pour cela on construit la marche aléatoire $(\tilde{S}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ définie pour m entier par :

$$\tilde{S}_m = S_{N_m}$$

Cette marche a la vertu d'être centrée avec un moment d'ordre deux fini ainsi que Skip-Free descendante. De plus, si on note $\tilde{\tau}_{-1} = \inf\{j, \tilde{S}_j = -1\}$, on a que l'événement $\{\tau_{-1} = N_n\}$ se réécrit $\{\tilde{\tau}_{-1} = n\}$. L'existence de moments d'ordre deux de α entraîne l'existence du moment d'ordre deux de la marche $(\tilde{S}_m)_{m \in \mathbb{N}}$. Par le théorème central limite local on obtient alors que $\mathbb{P}(t_{-1} = N_n)$ est d'ordre $n^{-\frac{3}{2}}$.

On a donc que $G_n(x)$ converge presque sûrement vers x . □

Avant de s'attaquer à l'étude de la fonction de contour, on présente le résultat suivant :

Proposition 9. $\bar{S}^{(n)}$ converge en loi vers $r\mathbf{e}$, où r est une constante strictement positive et \mathbf{e} est une excursion brownienne.

On a besoin du résultat intermédiaire :

Lemme. Soit $(A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une marche aléatoire partant de 0 et dont la loi de saut est de moyenne nulle et admet un moment d'ordre deux (non nul). On pose pour n dans \mathbb{N}^* , $\bar{A}^{(n)}$ la fonction continue allant de $[0; 1]$ à valeurs réelles, telle que pour tout $k \leq n$:

$$\bar{A}^{(n)}\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} A_k$$

et étant affine dans $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ pour $0 \leq k < n$.

On pose $\tau_{-1}(A) = \inf\{m, A_m < 0\}$, alors il existe une constante r strictement positive (ne dépendant que du moment d'ordre deux de la marche) telle que sur $\mathbb{P}(\cdot | \tau_{-1}(A) = n)$, $\bar{A}^{(n)}$ converge en loi vers $r\mathbf{e}$

Ce lemme peut être vu comme une version conditionnelle du théorème de Donsker. On ne prouve pas ce résultat pour éviter d'alourdir excessivement le propos, on renvoie à [8] pour une preuve.

Passons à la preuve de la proposition 9.

Démonstration. On n'expose ici que les grandes lignes de la démonstration de Pitman et Rizzolo.

On reprend les notations de la preuve de la proposition 8, on pose $\tilde{S}^{(n)}$ la fonction continue définie sur $[0, n]$ qui pour tout entier $m \leq n$ vaut \tilde{S}_m et entre deux valeurs entières est affine. On introduit aussi la normalisation $B^{(n)}$:

$$B^{(n)} : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{n}} \tilde{S}^{(n)}(nx)$$

En utilisant le lemme précédent on obtient qu'il existe une constante strictement positive r , tel que la fonction aléatoire B conditionnée à $\{\tau_{-1}(\tilde{S}) = n\}$ (i.e \tilde{S} devient négative pour la première fois en n) converge en loi vers $r \mathbf{e}$.

On explique maintenant comment en déduire le passage à la fonction $\bar{S}^{(n)}$. À cette fin, on construit une fonction bijective continue croissante ϕ_n allant de $[0; 1]$ dans lui-même telle que pour tout entier k inférieur à n , $\phi_n(\frac{k}{n}) = l_k$ et dans l'intervalle $[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}]$, ϕ_n est affine.

Remarquons que la fonction ϕ_n a le bon goût de tendre presque sûrement vers l'identité et de vérifier $B^{(n)}(\phi_n^{-1}(\frac{k}{n})) = \bar{S}^{(n)}(\frac{k}{n})$ pour tout entier k inférieur à n . Mais la fonction aléatoire $x \rightarrow B^{(n)}(\phi_n^{-1}(x))$ converge en loi vers $r \mathbf{e}$. Pour conclure sur la convergence de $\bar{S}^{(n)}$, il faut évaluer les oscillations. Celles-ci peuvent être contrôlées grâce au module de continuité. Pour une preuve détaillée de ce dernier point, on renvoie à [10]. \square

Ce dernier résultat nous permet de déduire par des méthodes bien connues (voir par exemple [7]) qu'il existe deux constantes positives r_1 et r_2 telles que $\bar{C}^{(n)}$ converge en loi vers $r_1 \mathbf{e}$ et $\bar{H}^{(n)}$ convergent en loi vers $r_2 \mathbf{e}$. On va par contre s'arrêter une seconde pour montrer proprement la convergence de la fonction F_n vers F (fonction de répartition d'une loi uniforme).

Plus précisément :

Proposition 10. *Pour n dans \mathbb{N}^* , on note f_1, \dots, f_n les positions des feuilles dans $\bar{C}^{(n)}$, alors la fonction F_n définie par :*

$$\forall x \in [0, 1], F_n(x) = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{f_k < x}$$

converge pour la norme infinie vers F en probabilité.

Démonstration. Notons $v_0, \dots, v_{\#T_n-1}$ les nœuds de T_n , et posons pour tout k dans $\llbracket 0, \#T_n - 1 \rrbracket$ $m(k)$ le premier instant où l'on rencontre v_k lorsque l'on décrit le parcours de T_n . On vérifie que :

$$m(k) = 2k - H_{T_n}(k)$$

Les feuilles n'étant parcourues qu'une seule fois, on obtient que

$$f_k = \frac{N_k - 1}{\#T_n - 1} - \frac{\sqrt{n}\bar{H}_{l_k}^{(n)}}{2(\#T_n - 1)}$$

Où l'on utilise les notations de la proposition 8. Or pour tout $k \leq n$, $l_k = \frac{N_k-1}{\#T_n}$.

Pour déduire le résultat de la proposition 8, il suffit de montrer que

$$\frac{\sqrt{n}}{\#T_n} \sup_{x \in [0;1]} \bar{H}^{(n)}$$

tend en probabilité vers 0. Mais comme nécessairement $n \leq \#T_n$, le résultat découle de la convergence de $\bar{H}^{(n)}$ vers une excursion brownienne renormalisée. \square

Les résultats précédents sur la fonction contour se compriment sous la forme :

Théorème 1. *Il existe une constante strictement positive r , telle que le couple $(\bar{C}^{(n)}, F_n)$ converge en loi vers $(r\mathbf{e}, F)$, où F est la fonction de répartition d'une loi uniforme et \mathbf{e} est une excursion brownienne.*

Démonstration. On a déjà la convergence en loi de F_n vers F et de $\bar{C}^{(n)}$ vers $r\mathbf{e}$, avec r une constante strictement positive. F étant déterministe, il suffit d'appliquer le théorème de Slutsky pour obtenir le résultat souhaité. \square

On est maintenant en mesure de montrer le résultat principal de cette section :

Théorème 2. *Soit k un entier fixe, notons \mathcal{T}_k l'ensemble des arbres de Schröder à k feuilles, $(Tree_{(k, F_n, \bar{C}^n)}(\{T\}))_{T \in \mathcal{T}_k}$ converge en loi vers $(Tree_{(k, F, \mathbf{e})}(\{T\}))_{T \in \mathcal{T}_k}$.*

Ceci est équivalent à la convergence en loi de $Tree_{(k, F_n, \bar{C}^n)}$ vers $Tree_{(k, F, \mathbf{e})}$, où on voit ces variables aléatoires comme des variables à valeurs dans l'espace des mesures sur les arbres de Schröder.

Démonstration. Avant de commencer la preuve remarquons que par définition : $Tree_{(k, F_n, \bar{C}^{(n)})} = Tree_{(k, F_n, \frac{1}{r}\bar{C}^{(n)})}$

Quitte à utiliser le théorème de Skorokhod, on peut supposer l'existence d'une

excursion \mathbf{e} brownienne telle que $(\frac{1}{r}\bar{C}^{(n)}, F_n)$ converge presque sûrement vers (\mathbf{e}, F) . On va montrer que pour tout T dans \mathcal{T}_k , $\text{Tree}_{(k, F_n, \bar{C}^{(n)})}(\{T\})$ converge presque sûrement vers $\text{Tree}_{(k, F_n, \mathbf{e})}(\{T\})$, le théorème découlant directement.

Notons F_n^{\leftarrow} la fonction quantile de F_n . La convergence en norme infinie de F_n vers F entraîne celle de F_n^{\leftarrow} vers F . L'intérêt d'introduire la fonction quantile et que si on prend X uniforme dans $[0, 1]$ alors $F_n^{\leftarrow}(X)$ a la loi donnée par F_n . Soit T dans \mathcal{T}_k , on a que :

$$\text{Tree}_{(k, F_n, \bar{C}^{(n)})}(\{T\}) = \int_{[0,1]^k} \mathbb{1}_{\theta(\bar{C}_n, (F_n^{\leftarrow}(x_1), \dots, F_n^{\leftarrow}(x_k)))} dx_1 \dots dx_k$$

Plaçons-nous sur une réalisation du hasard telle qu'on ait bien la convergence de $(\frac{1}{r}\bar{C}^{(n)}, F_n)$ vers (\mathbf{e}, F) . Comme les minima locaux d'une excursion brownienne sont presque sûrement tous distincts, on peut supposer, quitter à supprimer un ensemble de mesure négligeable, que tous les minima locaux sont bien distincts. On a alors :

$$\mathbb{1}_{\theta(\bar{C}_n, (F_n^{\leftarrow}(x_1), \dots, F_n^{\leftarrow}(x_k)))} \rightarrow \mathbb{1}_{\theta(\mathbf{e}, (x_1, \dots, x_k))}$$

Pour tout k -uplet (x_1, \dots, x_k) tel que aucun de ses points réalise un minimum local de \mathbf{e} . Mais l'ensemble des points réalisant un minimum local étant dénombrables, on a bien par convergence dominée :

$$\int_{[0,1]^k} \mathbb{1}_{\theta(\bar{C}_n, (F_n^{\leftarrow}(x_1), \dots, F_n^{\leftarrow}(x_k)))} dx_1 \dots dx_k \rightarrow \int_{[0,1]^k} \mathbb{1}_{\theta(\mathbf{e}, (x_1, \dots, x_k))} dx_1 \dots dx_k$$

□

Toutes les constantes ici rencontrées ne dépendent que du moment d'ordre deux de la mesure α . C'est l'existence du moment d'ordre deux qui nous a permis d'avoir une limite brownienne pour la marche de Lukasiewicz. Mais on peut obtenir aussi, *mutatis mutandis*, le même type de résultat en faisant l'hypothèse que la marche de Lukasiewicz est dans le domaine d'attraction d'une loi stable.

Dans la section suivante on va étudier la distribution des étiquettes, cette étude nous donnera accès à la fréquence des motifs.

3.3 Étude des étiquettes et permuton limite

Reprenons le cheminement de notre argumentation. On considère σ_n une permutation aléatoire de loi uniforme dans l'ensemble des permutations séparables de taille n . On cherche à déterminer la convergence de μ_{σ_n} . Pour cela, on va commencer par montrer que pour toute permutation π la suite $(\mathbb{E}[\tau(\pi, \sigma_n)])_{n \in \mathbb{N}^*}$ admet une limite. Après il suffira de trouver un permuton aléatoire μ tel que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[\tau(\pi, \sigma_n)] = \mathbb{E}[\tau(\pi, \mu)]$$

pour conclure à l'aide de proposition 3.

- Remarquons que le passage des permutations aux permutons ne pose aucun problème dès le moment où π est une permutation fixe puisque n part vers l'infini.

On introduit certaines notations qu'on gardera tout au long de cette section. On pose pour tout n entier non nul, \mathbf{T}_n un arbre de Schröder pris de manière uniforme sur l'ensemble des arbres de Schröder bien étiqueté à n feuilles. On note $\bar{C}^{(n)}$ le contour normalisé $\bar{C}_{\text{forme}(\mathbf{T}_n)}$ et \bar{s}_n la fonction allant des pré-images des minima locaux de $C^{(n)}$ dans $\{\ominus, \oplus\}$ qui à un élément associe l'étiquette du nœud correspondant dans \mathbf{T}_n .

Fixons-nous une permutation π et notons k sa taille, l'étude de la limite de $\mathbb{E}[\tau(\pi, \sigma_n)]$ revient à celle de :

$$\sum_{\mathbf{T} \in S(\pi)} \mathbb{E}[\text{Tree}_{(k, F_n, \bar{C}^{(n)}, \bar{s}_n)}^{(S)}(\{\mathbf{T}\})]$$

Où l'on rappelle que $S(\pi)$ désigne l'ensemble des arbres de Schröder étiquetés codant π . L'avantage de cette expression est qu'on a la convergence en loi de $\bar{C}^{(n)}$ vers une excursion brownienne (renormalisée). Soit \mathbf{T} dans $S(\pi)$, pour alléger les écritures on pose :

$$V_n(\mathbf{T}) := \mathbb{P}(\theta^{(S)}(\bar{C}^{(n)}, \bar{s}_n, (F_n^{\leftarrow}(X_1), \dots, F_n^{\leftarrow}(X_k)) = \mathbf{T} | \theta(\bar{C}^{(n)}, (F_n^{\leftarrow}(X_1), \dots, F_n^{\leftarrow}(X_k)) = \text{forme}(\mathbf{T}))$$

Alors en passant aux probabilités conditionnelles, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\text{Tree}_{(k, F_n, \bar{C}^{(n)}, \bar{s}_n)}^{(S)}(\{\mathbf{T}\})] &= \mathbb{P}(\theta^{(S)}(\bar{C}^{(n)}, \bar{s}_n, (F_n^{\leftarrow}(X_1), \dots, F_n^{\leftarrow}(X_k)) = \mathbf{T}) \\ &= V_n(\mathbf{T}) \times \mathbb{P}(\theta(\bar{C}^{(n)}, (F_n^{\leftarrow}(X_1), \dots, F_n^{\leftarrow}(X_k)) = \text{forme}(\mathbf{T})) \\ &= V_n(\mathbf{T}) \times \mathbb{E}[\text{Tree}_{(k, F_n, \bar{C}^{(n)})}(\{\text{forme}(\mathbf{T})\})] \end{aligned}$$

Où X_1, \dots, X_k sont des variables indépendantes distribuées uniformément sur $[0, 1]$ et F_n^{\leftarrow} désigne l'inverse à droite de F_n .

D'après le théorème 2, on a la convergence en loi de $\text{Tree}_{(k, F_n, \bar{C}^{(n)})}(\{T\})$ vers $\text{Tree}_{(k, F, \mathbf{e})}(\{T\})$ pour tout arbre de Schröder T . On a donc :

$$\mathbb{E}[\text{Tree}_{(k, F_n, \bar{C}^{(n)})}(\{\text{forme}(\mathbf{T})\})] \rightarrow \mathbb{E}[\text{Tree}_{(k, F, \mathbf{e})}(\{\text{forme}(\mathbf{T})\})]$$

Notons \mathcal{T} (resp. $\mathcal{T}^{(S)}$) l'ensemble des arbres binaires (resp. l'ensemble des arbres binaires étiquetés). Puis pour m entier \mathcal{T}_m (resp. $\mathcal{T}_m^{(S)}$) les arbres de \mathcal{T} (resp. $\mathcal{T}^{(S)}$) à m feuilles. Comme presque sûrement tout les minima locaux de \mathbf{e} sont distincts :

$\text{Tree}_{(k,F,e)}$ est supporté par \mathcal{T}_k .

On peut donc restreindre l'étude à \mathbf{T} dans $\mathcal{T}^{(S)}$. On va conclure grâce à la proposition suivante :

Proposition 11. *Soit π une permutation de taille k , et \mathbf{T} un arbre binaire dans $S(\pi)$ alors :*

$$V_n(\mathbf{T}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{k-1}}$$

lorsque n tend vers l'infini.

Démonstration. On se place dans le contexte des arbres. On reprend comme précédemment, T_n un arbre de Galton-Watson de loi de reproduction γ conditionné à avoir n feuilles. À partir de T_n on peut construire un arbre de Schröder étiqueté en choisissant l'étiquette de la racine de manière uniforme dans $\{\oplus, \ominus\}$ puis en imposant qu'aucun nœud n'ait la même étiquette que son père. On note \mathbf{T}_n l'arbre obtenu. Par définition $\phi(\mathbf{T}_n)$ est de même loi que σ_n .

On tire au hasard de manière uniforme k feuilles, notons les L_1, \dots, L_k où on les ordonne par ordre d'apparition lorsqu'on décrit le contour de \mathbf{T}_n de gauche à droite (n partant à l'infini, on néglige la possibilité de rencontrer plusieurs fois la même feuille). On pose pour i dans $\llbracket 1, k-1 \rrbracket$, M_i le plus proche ancêtre commun des feuilles L_i et L_{i+1} et $s(M_i)$ l'étiquette correspondante. On veut montrer :

$$\mathbb{P}(s(M_1) = \epsilon_1, \dots, s(M_{k-1}) = \epsilon_{k-1} \mid \text{arb}(\{L_1, \dots, L_k\}, T_n) = t) \rightarrow \frac{1}{2^{k-1}}$$

pour tout $k-1$ -uplet $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{k-1})$ dans $\{\oplus; \ominus\}^{k-1}$ et tout t dans \mathcal{T}_k .

On commence par énoncer une propriété d'invariance pour les arbres de Galton-Watson. Soit α une mesure sur \mathbb{N} et R un arbre de Galton-Watson de loi de reproduction α . Soit T un arbre plan fini, prenons v_{in} et v_{out} deux nœuds de T tels que v_{in} est un ancêtre de v_{out} . Notons l la distance dans l'arbre entre v_{in} et v_{out} moins 1, et nommons $v_{in}, u_1, \dots, u_l, v_{out}$ les nœuds du plus court chemin allant de v_{in} à v_{out} par ordre d'apparition (lorsqu'on va de v_{in} à v_{out}). Pour tout i dans $\llbracket 1, l \rrbracket$, on note G_i (resp. D_i) le sous arbre de T formé des nœuds du sous arbres issus de u_i apparaissant après u_i et avant (resp. après) u_{i+1} lorsqu'on parcourt T de gauche à droite (la racine du sous arbre étant u_i) (voir figure ci-dessous). Pour tout permutation δ de taille l , on note $(\delta, v_i, v_f) \cdot T$ l'arbre plan construit à partir de T en changeant G_i par $G_{\delta(i)}$ et D_i par $D_{\delta(i)}$ pour i dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. Cette transformation laisse la probabilité invariante, i.e $\mathbb{P}(R = T) = \mathbb{P}(R = (\delta, v_i, v_f) \cdot T)$. Ceci s'applique donc pour la loi γ . Ici on aurait pu utiliser le fait que pour tout entier non nul n , T_n se distribue de manière uniforme sur l'ensemble des arbres de Schröder à n feuilles. Mais on choisit de présenter cette approche afin de garder une certaine généralité.

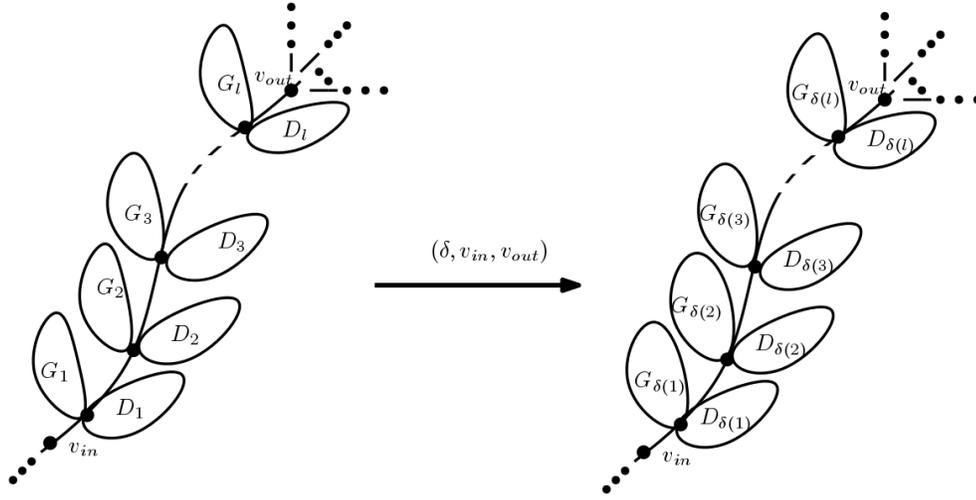


FIGURE 3.5 – Action de (δ, v_i, v_f)

On va utiliser cette propriété pour déduire la proposition. On rappelle que les étiquettes des nœuds de \mathbf{T}_n ne dépendent que de l'étiquette racine, les nœuds internes ayant la même étiquette que la racine s'ils sont à hauteur paire et l'autre sinon (les nœuds internes ne peuvent pas avoir étiquette 1). C'est pour cette raison qu'on fera abstraction des étiquettes et on s'intéressera directement à la hauteur dans T_n . Afin d'avoir une image plus intuitive, on verra l'arbre T_n et les feuilles L_1, \dots, L_k comme la donnée de l'arbre T_n dont on a colorié en bleu les feuilles L_1, \dots, L_k . De plus, pour tout i dans $\llbracket 1, k-1 \rrbracket$ on colorie le nœud M_i en jaune et on lui associe l'entier i . Constatons que les $(M_i)_{i \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket}$ ne sont pas forcément distincts, ils peuvent donc avoir plusieurs entiers associés. Ceci ne pose pas de problème ni de réelle ambiguïté puisqu'on s'intéresse au cas où l'arbre engendré par les feuilles L_1, \dots, L_k est binaire qui est équivalent à demander que tous les $(M_i)_{i \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket}$ soient distincts. On introduit ces entiers afin de pouvoir différencier les nœuds coloriés en jaune. Pour éviter des confusions on notera $\text{col}(L_1, \dots, L_k, T_n)$ l'arbre colorié (avec les entiers associés aux nœuds jaunes).

Prenons T un arbre plan fini, ayant certaines feuilles coloriées en bleu et certains nœuds internes coloriés en jaune avec des entiers associés (un entier ne pouvant être associé qu'à un nœud interne). Comme dans le cas non coloré, on va définir une manière de mélanger ces arbres. On reprend les mêmes notations que pour le cas sans couleur, on notera $(\delta, v_{in}, v_{out}) \cdot T$ l'arbre T dans lequel on a échangé G_i par $G_{\delta(i)}$ et D_i par $D_{\delta(i)}$ pour i dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ en transportant aussi les couleurs et les entiers des nœuds. On échange notamment le nœud (avec sa éventuelle couleur et ses entiers) u_i par $u_{\delta(i)}$ pour i dans $\llbracket 1, l \rrbracket$ (voir figure 3.7).

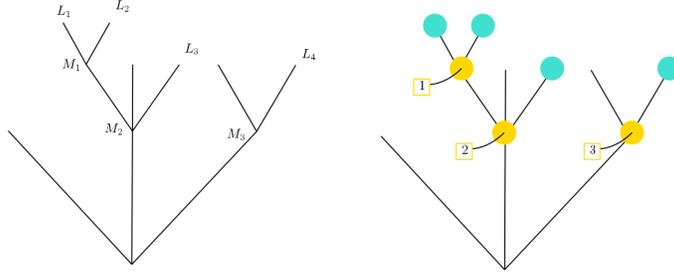


FIGURE 3.6 – Arbre colorié

Fixons t un arbre dans \mathcal{T}_k . Notons $\text{Col}_k(t)$ l'ensemble des arbres plans, ayant k feuilles a_1, \dots, a_k (ordonnées par ordre d'apparitions pour le parcours de gauche à droite) coloriées en bleu, vérifiant

$$\text{arb}(\{a_1, \dots, a_k\}, T) = t$$

et où pour tout i dans $\llbracket 1, k-1 \rrbracket$ l'ancêtre commun entre a_i et a_{i+1} est colorié en jaune et a l'entier i associé. On appellera les éléments de $\text{Col}_k(t)$ des arbres coloriés selon t .

Pour T un arbre colorié selon t , on notera $a_1(T), \dots, a_k(T)$ ses feuilles coloriées ordonnées de gauche à droite, et pour tout i dans $\llbracket 1, k-1 \rrbracket$ on pose $b_i(T)$ le plus proche ancêtre commun entre $a_i(T)$ et $a_{i+1}(T)$. Pour des raisons de cohérences et symétries, on introduit un point noté b_0 relié uniquement à la racine de T , il joue le rôle de père de la racine. Pour tout i dans $\llbracket 1, k-1 \rrbracket$ on définit $W_i(T)$ comme étant le plus court chemin allant de b_{i-1} vers a_i . On appelle ces chemins, les lignes de T . Constatons que les lignes peuvent avoir ou non ailleurs de ces extrémités des nœuds coloriés en jaune (ceci dépendant de t). On notera $d_i(T)$ la longueur de $W_i(T)$ moins 2 pour i dans $\llbracket 1, k-1 \rrbracket$ et $d(T) := d_1(T) \wedge \dots \wedge d_{k-1}(T)$

Pour tout T dans $\text{Col}_k(t)$, on définit $Z(T)$ le plus petit ensemble d'arbres coloriés selon t contenant T et vérifiant :

Pour tout \tilde{T} dans $Z(T)$ et tout i dans $\llbracket 1, k-1 \rrbracket$:

$$(\delta, b_{i-1}(\tilde{T}), a_i(\tilde{T})) \cdot \tilde{T} \text{ est aussi dans } Z(T)$$

où δ est une permutation de taille d_i . On demande en plus à la permutation δ de préserver l'ordre relatif (ancêtre) des nœuds coloriés en jaune. Plus formellement, on note $b_{i-1}(T), u_1, \dots, u_{d_i}, a_i(T)$ les nœuds de $W_i(T)$ par ordre d'apparition. On demande que s'il existe deux entiers $p < q$ dans $\llbracket 1, d_i \rrbracket$ tels que u_p et u_q soient coloriés en jaune, alors $\delta^{-1}(p) < \delta^{-1}(q)$ (voir figure 3.7).

Les contraintes sur δ sont nécessaires afin de garantir que $(\delta, b_{i-1}(\tilde{T}), a_i(\tilde{T})) \cdot \tilde{T}$ soit encore dans $\text{Col}_k(t)$. Constatons aussi que les lignes de deux éléments dans

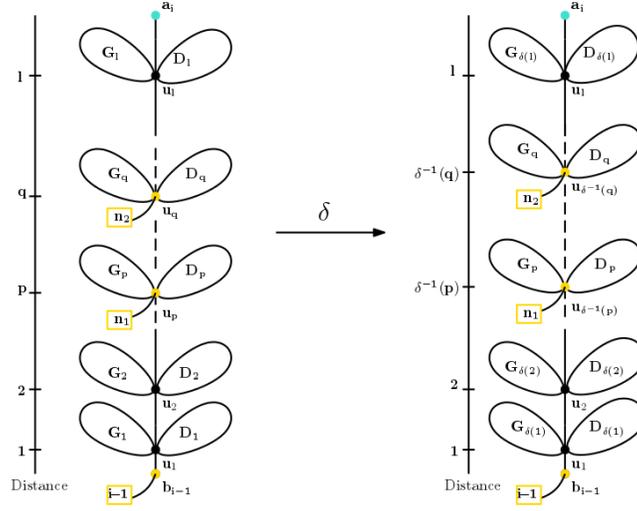


FIGURE 3.7

$Z(T)$ ne diffèrent que dans la position de ses nœuds internes coloriés en jaune. Où l'on dit qu'un nœud est interne pour une ligne lorsqu'il n'est pas l'une de ses extrémités. On parlera donc de lignes de $Z(T)$ pour se référer aux $(W_i(T))_{i \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket}$ où l'on fait abstraction des couleurs et entiers associés aux nœuds internes des lignes. On les notera $(W_i(Z(T)))_{i \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket}$.

On dira pour T et \tilde{T} , deux arbres coloriés selon t , qu'ils sont équivalents si \tilde{T} est dans $Z(T)$. Ceci définit une relation d'équivalence sur $\text{Col}_k(t)$. On note \mathcal{Z} l'ensemble $\{Z(T), T \in \text{Col}_k(t)\}$.

L'intérêt d'une telle partition de $\text{Col}_k(t)$, et que pour Z dans \mathcal{Z} , $\text{col}(L_1, \dots, L_k, T_n)$ sachant qu'il est dans Z suit une loi uniforme sur Z , or sur Z la position des nœuds jaunes est simple. Plus précisément, soit T dans $\mathcal{T}_{\text{Col}_k}^k(t)$, notons pour i dans $\llbracket 1, k-1 \rrbracket$: j_i le nombre de nœuds jaunes internes sur $W_i(T)$. Par définition de $\text{Col}_k(t)$ ceci ne dépend pas de T mais uniquement de t . Prenons T uniforme sur Z , pour tout i dans $\llbracket 1, k-1 \rrbracket$, les j_i points jaunes sur la ligne $W_i(Z)$ (pour obtenir $W_i(T)$) sont placés de manière uniforme sur les j_i -uplets de nœuds internes de la ligne. Tout cela de manière indépendante de la position des nœuds internes jaunes des autres lignes, les entiers associés étant après directement imposés par Z . On a donc l'existence d'une fonction r décroissante convergeant vers 0 en l'infini, tel que pour tout (e_1, \dots, e_{k-1}) dans $\{0, 1\}^{k-1}$

$$|\mathbb{P}(h_1 \equiv e_1[2], \dots, h_{k-1} \equiv e_{k-1}[2] \mid \text{col}(L_1, \dots, L_k, T_n) \in Z(T)) - \frac{1}{2^{k-1}}| \leq r(d(T))$$

où pour tout i dans $\llbracket 1, k-1 \rrbracket$, h_i est la hauteur de M_i .

On peut enfin conclure. En fait pour (e_1, \dots, e_{k-1}) dans $\{0, 1\}^{k-1}$, $\mathbb{P}(h_1 \equiv e_1[2], \dots, h_{k-1} \equiv e_{k-1}[2], \text{arb}(\{L_1, \dots, L_k\}, T_n) = t)$ est égal par conditionnement à :

$$\sum_{Z \in \mathcal{Z}} \mathbb{P}(h_1 \equiv e_1[2], \dots, h_{k-1} \equiv e_{k-1}[2] \mid \text{col}(L_1, \dots, L_k, T_n) \in Z) \times \mathbb{P}(\text{col}(L_1, \dots, L_k, T_n) \in Z)$$

Fixons D un entier, en utilisant l'inégalité précédente on peut majorer brutalement

$$|\mathbb{P}(h_1 \equiv e_1[2], \dots, h_{k-1} \equiv e_{k-1}[2], \text{arb}(\{L_1, \dots, L_k\}, T_n) = t) - \frac{1}{2^{k-1}} \mathbb{P}(\text{arb}(\{L_1, \dots, L_k\}, T_n) = t)|$$

par :

$$r(D) + \mathbb{P}(d(\text{col}(L_1, \dots, L_k, T_n)) \leq D)$$

D'après le théorème 1, (C_{T_n}, F_n) converge en loi vers (\mathbf{e}, F) . Où l'on reprend les notations de la section précédente, F_n étant la fonction de répartition des feuilles de T_n et F la fonction de répartition d'une loi uniforme sur $[0, 1]$. On a donc forcément que $d(\text{Col}(L_1, \dots, L_k, T_n))$ converge en probabilité vers l'infini (on peut raisonner comme pour la preuve du théorème 2 en utilisant le théorème de Skorohod pour voir que l'ordre de grandeur de $d(\text{col}(L_1, \dots, L_k, T_n))$ est \sqrt{n}). D étant fixe, on a donc bien que

$$|\mathbb{P}(h_1 \equiv e_1[2], \dots, h_{k-1} \equiv e_{k-1}[2], \text{arb}(\{L_1, \dots, L_k\}, T_n) = t) - \frac{\mathbb{P}(\text{arb}(\{L_1, \dots, L_k\}, T_n) = t)}{2^{k-1}}|$$

converge vers 0.

Pour conclure, il suffit de remarquer que $\mathbb{P}(\text{arb}(\{L_1, \dots, L_k\}, T_n) = t)$ tend vers une constante non nulle. En fait d'après le théorème 2 :

$$\mathbb{P}(\text{arb}(\{L_1, \dots, L_k\}, T_n) = t) \text{ converge vers } \mathbb{E}[\text{Tree}_{(k, F, \mathbf{e})}(\{t\})].$$

Cette quantité est bien connue, voir [7], et vaut $\frac{1}{\text{Cat}_{k-1}}$. Où Cat_{k-1} désigne le $k-1$ nombre de Catalan. \square

En appliquant la proposition précédente, on obtient :

$$\mathbb{E}[\tau(\pi, \mu_{\sigma_n})] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{\mathbf{T} \in S(\pi) \cap \mathcal{T}_k^{(S)}} \frac{1}{2^{k-1}} \mathbb{E}[\text{Tree}_{(k, F, \mathbf{e})}(\{\text{forme}(\mathbf{T})\})]$$

Pour conclure sur la convergence en loi de μ_{σ_n} il suffit donc de construire un permuton aléatoire μ vérifiant :

$$\mathbb{E}[\tau(\pi, \mu)] = \sum_{\mathbf{T} \in S(\pi) \cap \mathcal{T}_k^{(S)}} \frac{1}{2^{|\pi|-1}} \mathbb{E}[\text{Tree}_{(|\pi|, \mathbf{e}, F)}(\{\text{forme}(\mathbf{T})\})]$$

Pour toute permutation π et où l'on note $|\pi|$ sa taille.

Remarquons que d'après la construction faite à la fin de la section 1 partie 3 proposition 7, cette relation est vérifiée par le permuton $\mu_{(F, \mathbf{e}, \mathbf{s})}$ où \mathbf{s} associe à chaque minimum local une étiquette dans $\{\oplus, \ominus\}$ de manière équiprobable et indépendamment de \mathbf{e} et des étiquettes des autres minima (ici on n'introduit aucune ambiguïté en confondant minimum local et pré-images puisque presque sûrement tout les minima locaux de \mathbf{e} sont distincts). En fait, \mathbf{s} est construit de manière à obtenir le facteur $2^{-|\pi|+1}$.

On peut enfin énoncer le théorème :

Théorème 3. *On a que μ_{σ_n} converge en loi vers $\mu_{(Leb, \mathbf{e}, \mathbf{s})}$*

Il reste un dernier problème à surmonter pour finir la preuve, il faut montrer qu'on peut construire le couple (\mathbf{e}, \mathbf{s}) de manière mesurable.

Démonstration. On se fixe une excursion brownienne \mathbf{e} et on cherche à définir \mathbf{s} dessus. Pour cela on se donne un tableau de variables aléatoires $(X_i^{(n)})_{1 < n, i \leq n}$ choisissant de manière équiprobable une étiquette dans $\{\oplus, \ominus\}$, ces variables étant indépendantes entre elles mais aussi de \mathbf{e} .

On construit \mathbf{s} de la manière suivante :

Considérons une réalisation du hasard (on suppose que \mathbf{e} a tous ses minima distincts), si x est un minimum local alors on prend m le plus petit entier vérifiant :

$$1 < m \text{ et il existe } i < m \text{ tel que } x \in [\frac{i}{m}, \frac{i+1}{m}] \text{ et } \mathbf{e}(x) = m_{\mathbf{e}}([\frac{i}{m}, \frac{i+1}{m}])$$

On associe à x l'étiquette $X_i^{(n)}$.

Cette construction vérifie les propriétés voulues et elle est bien mesurable. \square

On termine ce mémoire en montrant certaines propriétés du permuton limite $\mu_{(Leb, \mathbf{e}, \mathbf{s})}$.

3.4 Quelques propriétés

Dans cette dernière section, on fixe au préalable \mathbf{e} une excursion brownienne et \mathbf{s} une fonction aléatoire associant à chaque minimum local de \mathbf{e} une étiquette dans $\{\oplus, \ominus\}$ de manière équiprobable, ce choix s'opérant de manière indépendante des étiquettes des autres minima locaux. On reprend les notations des sections précédentes. Pour les alléger un peu, on notera μ la mesure limite, au

lieu de $\mu_{(Leb, \mathbf{e}, \mathbf{s})}$. On rappelle (proposition 7) que $\boldsymbol{\mu}$ est la loi de $(X, G_{(Leb, \mathbf{e}, \mathbf{s})}(X))$ avec X uniforme sur le segment $[0, 1]$. On notera par la suite \mathbf{G} la fonction aléatoire $G_{(Leb, \mathbf{e}, \mathbf{s})}$ et pour toute permutation π , Λ_π la variable $\Lambda_\pi(Leb, \mathbf{e}, \mathbf{s})$.

Le premier résultat qu'on énonce nous donne le comportement asymptotique (moyen) de la fréquence des motifs :

Proposition 12. *On prend π une permutation fixe, notons $|\pi|$ sa taille. On a que :*

$$\mathbb{E}[\tau(\pi, \sigma_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Card}(S(\pi) \cap \mathcal{T}_{|\pi|}^{(S)})}{2^{|\pi|-1} \text{Cat}_{|\pi|-1}}$$

où pour tout entier n , Cat_n désigne le n -ième nombre de Catalan.

Démonstration. On a prouvé dans la section précédente que $\mathbb{E}[\tau(\pi, \sigma_n)]$ converge vers

$$\mathbb{E}[\Lambda_\pi] = \sum_{\mathbf{T} \in S(\pi)} \frac{1}{2^{|\pi|-1}} \mathbb{E}[\text{Tree}_{(|\pi|, F, \mathbf{e})}(S(\text{forme}(\mathbf{T})))]$$

Comme les minima locaux de l'excursion brownienne sont presque tous distincts, $\text{Tree}_{(|\pi|, F, \mathbf{e})}$ est supporté par $S(\pi) \cap \mathcal{T}_{|\pi|}^{(S)}$. Le résultat découle du fait bien connu dans le monde de l'arbre Brownien suivant :

$$\forall T \in \mathcal{T}_{|\pi|}, \mathbb{E}[\text{Tree}_{(|\pi|, F, \mathbf{e})}(T)] = \frac{1}{\text{Cat}_{|\pi|-1}}$$

Pour une preuve on renvoie à [7]. □

On va maintenant montrer que $\boldsymbol{\mu}$ est bien aléatoire (non déterministe) :

Proposition 13. *Pour toute permutation π , Λ_π est non déterministe.*

Démonstration. On expose la preuve présentée dans [5].

Prenons π une permutation et notons k sa taille.

On suppose que $\pi \neq 123..k$. On note pour n entier supérieur à k , $\delta_n = \frac{1}{4n^2}$. De plus :

Pour l dans $\llbracket 0; n \rrbracket$, on écrit $J_l = [\frac{l}{n} - \delta_n; \frac{l}{n} + \delta_n] \cap [0, 1]$

Pour l dans $\llbracket 1; n \rrbracket$, on écrit $I_l = [\frac{l-1}{n} + \delta_n; \frac{l}{n} - \delta_n]$

Soit A_n l'événement défini par :

- (1) Les minima de \mathbf{e} sur J_1, \dots, J_{n-1} ont tous pour étiquette \oplus .
- (2) $\max_{l \in \llbracket 0; n \rrbracket} \min_{J_l} \mathbf{e} < \min_{\cup I_l} \mathbf{e}$

Remarquons que pour tout n , A_n est de probabilité non nulle. Lorsque (\mathbf{e}, \mathbf{s}) réalise A_n , on a :

$$\Lambda_{12\dots k} > 1 - \frac{k^2}{n}$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient que si Λ_π était déterministe elle devrait être nulle. Mais ceci contredit le fait que $\mathbb{E}[\Lambda_\pi] > 0$ (comme $\Lambda_{12\dots k}$ a même loi que $\Lambda_{k\dots 21}$, à cause du rôle symétrique des opérations \oplus et \ominus , on a bien le résultat pour toute permutation π). \square

On énonce maintenant certaines propriétés sur \mathbf{G} .

Proposition 14.

(1) Posons $D(\mathbf{e})$ l'ensemble :

$$\{x \in [0, 1], \exists \epsilon > 0, \mathbf{e}(x) = m_{\mathbf{e}}(x, x + \epsilon) \text{ ou } \mathbf{e}(x) = m_{\mathbf{e}}(x - \epsilon, x)\}$$

presque sûrement $D(\mathbf{e})$ est l'ensemble des points de discontinuité de \mathbf{G} .

(2) Pour x dans $]0, 1[$, $\mathbf{G}(x)$ et $1 - \mathbf{G}(x)$ ont même loi. Ce qui entraîne $\mathbb{E}[\mathbf{G}(x)] = \frac{1}{2}$.

(3) Pour x dans $]0, 1[$, $\mathbf{G}(x)$ n'a pas d'atomes.

Démonstration. Commençons par le point (1), prenons x dans $[0, 1] \setminus D(\mathbf{e})$ et montrons que \mathbf{G} est continue en x . Par définition :

$$\mathbf{G}(x) = \int_{[0,1]} h(x, y) dy$$

Où h est la fonction qui vaut $\mathbb{1}_{\phi(\theta^{(S)}(\mathbf{e}, \mathbf{s}, (x, y)))=12}$ si $x > y$ et $\mathbb{1}_{\phi(\theta^{(S)}(\mathbf{e}, \mathbf{s}, (x, y)))=21}$ sinon.

Soit x_n une suite de réels dans $[0, 1]$ convergeant vers x . Comme x n'est pas dans $D(\mathbf{e})$, pour tout y dans $[0, 1] \setminus \{x\}$ le minimum de \mathbf{e} entre x et y n'est pas atteint en x . On a donc

$$\forall x \in [0, 1] \setminus \{x\}, \exists N(y) \in \mathbb{N}, \forall n \geq N(y), \theta^{(S)}(x, y, \mathbf{e}, \mathbf{s}) = \theta^{(S)}(x_n, y, \mathbf{e}, \mathbf{s})$$

Par convergence dominée, on obtient :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{G}(x_n) &= \int_{[0,1]} \lim_{n \rightarrow +\infty} h(x_n, y) dy \\ &= \int_{[0,1]} h(x, y) dy \\ &= \mathbf{G}(x) \end{aligned}$$

Montrons maintenant que presque sûrement tout point dans $D(\mathbf{e})$ est point de discontinuité. Soit x dans $D(\mathbf{e})$. Supposons que x est un minimum local à droite (le cas minimum local à gauche se traite de la même manière). L'unique différence avec les points de $[0, 1] \setminus D(\mathbf{e})$ est que l'ensemble :

$$\{y, y > x \text{ et } \mathbf{e}(x) = m_{\mathbf{e}}(x, y)\}$$

n'est plus vide. On note $A(x)$ cet intervalle. Comme on se place sur une réalisation typique de (\mathbf{e}, \mathbf{s}) , on peut prendre deux suites $(x_n^{\oplus})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x_n^{\ominus})_{n \in \mathbb{N}}$ de points dans $A(x)$ convergeant chacune vers x telles que le premier minimum local apparaissant après x_n^{\oplus} (resp. x_n^{\ominus}) ait pour étiquette \oplus (resp. \ominus). Alors on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{G}(x_n^{\ominus}) - \mathbf{G}(x_n^{\oplus}) = \text{Leb}(A(x))$$

Passons au point (2). On pose $\tilde{\mathbf{s}}$ l'application allant des minimas locaux de \mathbf{e} qui vaut \oplus lorsque \mathbf{s} vaut \ominus , et \ominus sinon. Par construction (\mathbf{e}, \mathbf{s}) et $(\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{s}})$ sont égales en loi, mais pour x dans $]0, 1[$ on a presque sûrement $G_{(\text{Leb}, \mathbf{e}, \mathbf{s})}(x) = 1 - G_{(\text{Leb}, \mathbf{e}, \tilde{\mathbf{s}})}(x)$. Et donc $G_{(\text{Leb}, \mathbf{e}, \mathbf{s})}(x)$ et $1 - G_{(\text{Leb}, \mathbf{e}, \mathbf{s})}(x)$ ont bien la même loi.

Attaquons maintenant la preuve du point (3). Pour toute réalisation typique de \mathbf{e} tous les minimas locaux sont distincts et donc leurs pré-images décrivent un ensemble dénombrable. On pose $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une numérotation des réels dans $[0, 1]$ réalisant un minimum local de \mathbf{e} . Pour les ordonnées on peut par exemple utiliser la même méthode que lors de la preuve de la mesurabilité de (\mathbf{e}, \mathbf{s}) (voir fin de la section précédente). Pour tout minimum local, on pose :

$$z_g(y) := \sup\{z, z \in [0, y] \text{ et } m_{\mathbf{e}}(z, y) < \mathbf{e}(y)\}$$

$$z_d(y) := \inf\{z, z \in [y, 1] \text{ et } m_{\mathbf{e}}(y, z) < \mathbf{e}(y)\}$$

et on notera $I_g(y)$ (resp. $I_d(y)$) l'intervalle $[z_g(y), y]$ (resp. $[y, z_d(y)]$). $I_g(y)$ correspond à l'excursion arrivant à y et $I_d(y)$ à celle partante de y .

En vue des propriétés de l'excursion brownienne, quitte à supprimer un ensemble négligeable, on peut supposer qu'il n'existe pas deux ensembles d'entiers B_1 et B_2 disjoints de cardinal fini et $(c_n)_{n \in B_1 \cup B_2}$ une suite d'éléments dans $\{g, d\}$ tels que :

$$\sum_{n \in B_1} \text{Leb}(I_{c_n}(y_n)) = \sum_{n \in B_2} \text{Leb}(I_{c_n}(y_n))$$

On va conclure à l'aide de cette propriété. Soit x dans $]0, 1[$, on pose $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une numérotation de l'ensemble :

$$\{y_n, n \in \mathbb{N}, m_{\mathbf{e}}(x, y_n) = \mathbf{e}(y_n)\}$$

on pose aussi pour tout entier n , $c_n = g$ si $x_n < x$ et $c_n = d$ sinon.

En utilisant ces notations on a :

$$\mathbf{G}(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \epsilon_n \text{Leb}(I_{c_n}(x_n))$$

où les $(\epsilon_n)_n$ sont des variables de loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, ces variables étant indépendantes entre elles et de \mathbf{e} . Plus précisément ϵ_n vaut 1 si et seulement $\mathbf{s}(x_n) = \oplus$ lorsque $x_n \leq x$ et $\mathbf{s}(x_n) = \ominus$ lorsque $x_n > x$. Notons pour tout entier N , \mathcal{F}_N la tribu engendrée par \mathbf{e} et les variables $(\epsilon_n)_{n > N}$. Soit a un réel dans $[0, 1]$ et N un entier non nul. D'après la propriété, sachant \mathcal{F}_N on ne peut avoir $\mathbf{G}(x) = a$ que pour une valeur de $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_N)$. Ce qui nous donne l'inégalité :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\mathbf{G}(x)=a}] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\mathbf{G}(x)=a} | \mathcal{F}_N]] \\ &\leq \frac{1}{2^N} \end{aligned}$$

a et N étant arbitraires, on a bien que $\mathbf{G}(x)$ n'a pas d'atomes. \square

On conclut ce mémoire par une application aux points fixes des permutations séparables.

Proposition 15. *Soit n un entier non nul, posons P_n la proportion de points fixe de σ_n , i.e :*

$$P_n = \frac{1}{n} \text{Card}(\{i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sigma_n(i) = i\})$$

alors on a que

$$\mathbb{E}[P_n] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Démonstration. Quitte à utiliser le théorème de Skorohod, on peut supposer que μ_{σ_n} converge presque sûrement vers μ .

Posons $\tilde{\mu}_{\sigma_n}$ la mesure :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{(i, \sigma_n(i))}$$

où pour tout couple de réels (x, y) , $\delta_{(x,y)}$ désigne la mesure de Dirac en (x, y) . Par définition, la convergence presque sûre de μ_{σ_n} vers μ entraîne celle de $\tilde{\mu}_{\sigma_n}$ vers μ .

Notons D la diagonale $\{(x, x), x \in [0, 1]\}$, d'après le théorème de Portemanteau on a :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\mu}_{\sigma_n}(D) \leq \mu(D)$$

En appliquant le théorème de convergence dominée, on obtient :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[\tilde{\mu}_{\sigma_n}(D)] \leq \mathbb{E}[\mu(D)]$$

Par construction on a $\mathbb{E}[\tilde{\mu}_{\sigma_n}(D)] = \mathbb{E}[P_n]$. On conclut en utilisant Fubini :

$$\mathbb{E}[\mu(D)] = \int_{x \in]0,1[} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\mathbf{G}(x)=x}] dx$$

D'après la proposition précédente pour tout x dans $]0, 1[$, $\mathbf{G}(x)$ n'a pas d'atomes.
On a donc bien :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[\tilde{\mu}_{\sigma_n}(D)] = 0$$

□

Bibliographie

- [1] A.Marcus and Gábor Tardos. Excluded permutation matrices and the stanley-wilf conjecture. *Journal of Combinatorial Theory Ser. A*, 107, (2004).
- [2] C.Hoffman, D.Rizzolo, and E.Slivken. Pattern-avoiding permutations and brownian excursion part i : Shapes and fluctuations. *arXiv :1406.5156*, (2014).
- [3] C.Hoffman, D.Rizzolo, and E.Slivken. Pattern-avoiding permutations and brownian excursion, part ii : Fixed points. *arXiv :1506.04174*, (2015).
- [4] C.Hoppen, Y.Kohayakawa, C.Moreira, B.Ráth, and R.Sampaio. Limits of permutation sequences. *Journal of Combinatorial Theory Ser. B*, 103, (2013).
- [5] F.Bassino, M.Bouvel, V.Féray, L.Gerin, and A.Pierrot. The brownian limit of separable permutations. *arXiv : 1602.04960*, (2017).
- [6] P. Flajolet and R. Sedgewick. *Analytic combinatorics*. Cambridge University Press, (2009).
- [7] J.-F. Le Gall. Random trees and applications. *Probability Surveys*, 2 :245, (2005).
- [8] W.D. Kaigh. An invariance principle for random walk conditioned by a late return to zero. *Probability Surveys*, 2 :115–121, (1976).
- [9] L.Lovász. *Large networks and graphs limits*. American Mathematical Society, (2010).
- [10] J. Pitman and D. Rizzolo. Schröder’s problems and scaling limits of random trees. *Transactions of the American Mathematical Society*, 10 :6943, (2015).
- [11] R.Abraham and J-F .Delmas. Local limits of conditioned galton-watson trees : the infinite spine case. *Electron. J. Probab.*, 19 :19 pp., 2014.
- [12] S.Fu, Z.Lin, and J.Zeng. Two new unimodal descent polynomials. *arXiv :1507.05184*, (2015).
- [13] S.Janson. Patterns in random permutations avoiding the pattern 132, part ii : Fixed points. *arXiv :1401.5679*, (2014).
- [14] S.Miner and I.Pak. The shape of random pattern-avoiding permutations. *arXiv :1303.7313*, (2013).