T.D. 1: Systèmes linéaires.

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants. Donner la structure de l'ensemble des solutions.

$$\begin{cases} 4x-2y = 5 \\ -6x+3y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+y-3z = 5 \\ 3x-2y+2z = 5 \\ 5x-3y-z = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x+y-z = -1 \\ x-2y-z = 1 \\ 2x-7y-8z = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x+y-z = 1 \\ x-2y-z = 1 \\ 2x-7y-8z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-y+3z = 3 \\ 3x+y-5z = 0 \\ 4x-y+z = 3 \\ x+3y-13z = -6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y-3z = -1 \\ 2x+y-2z = 1 \\ x+y+z = 3 \\ x+2y-3z = 1 \end{cases}$$

Exercice 2. Dans le plan réel, déterminer :

1. les triangles ayant pour milieu des côtés: $A(1,0)$ $B(0,0)$ $C(0,1)$.
2. les quadrilatères ayant pour milieu des côtés: $A, B, C,$ $D(1,1)$.

Exercice 3. Quelle valeur donner à a pour que le système n'admette pas de solution?

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -1 \\ -3x + y - 2z = -7 \\ 5x + ay - 4z = 2 \end{cases}$$

Exercice 4. Déterminer a, b, c pour que les systèmes admettent une et une seule solution:

$$\begin{cases} 2x + 3y = a \\ x - 2y = b \\ 3x + 2y = c \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 5y = a \\ -x + y = b \\ 3x - 2y = c \end{cases}$$

Exercice 5. Soit $m, \alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Résoudre le système suivant en discutant suivant les valeurs des paramètres m, α, β:

$$\begin{cases} mx-2y = 0 \\ x-(m+1)y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} mx+y+z = \alpha \\ x+my+z = \beta \end{cases}$$

Exercice 6. Résoudre dans $\mathbb{C}$,

$$\begin{cases} x+y+z = a \\ x+jy+j^2z = b \\ x+j^2y+jz = c \end{cases}$$

où $j = e^{2i\pi/3}$, et $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 7. Résoudre par la méthode du pivot de Gauss les systémes paramétrés suivants.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} ax & + & a^2y & - & (a^2+1)z & = & 0 \\ x & + & (a+1)y & - & az & = & 0 \\ x & + & (2a+1)y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} mx & + & (m-1)y & + & z & = & 0 \\ 2mx & + & my & - & (4-m)z & = & 0 \\ mx & + & y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 8. Résoudre le système ayant pour matrice et second membre:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & & & & \\ & 1 & -1 & & (0) & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & (0) & & & 1 & -1 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 2\times 1-1 \\ 2\times 2-1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 2(n-1)-1 \\ -(n-1)^2 \end{pmatrix}$$

Exercice 9. Résoudre le système ayant pour matrice et second membre:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 2 & 1 & \ddots & & & & \vdots \\ 3 & 2 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ n-1 & & & \ddots & 2 & 1 & 0 \\ n & n-1 & \cdots & \cdots & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{i} k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} k \end{pmatrix}$$

Exercice 10. Résoudre le système ayant pour matrice et second membre:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 2 & 1 & \ddots & & & & \vdots \\ 3 & 2 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ n-1 & & & \ddots & 2 & 1 & \alpha \\ n & n-1 & \cdots & \cdots & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{i} k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} k \end{pmatrix}$$

Discuter en fonction des valeurs du paramètre α.