T.D. 2: Espaces et sous espaces vectoriels.

Exercice 1. Trouver les s.e.v. parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$:

- $B_1 = \{(x,y,z) \in E \mid x - y + z = 0\}$
- $B_2 = \{(x,y,z) \in E \mid x = 1\}$
- $B_3 = \{(x,y,z) \in E \mid x > y\}$
- $B_4 = \{(x,y,z+x) \in E \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$
- $B_5 = \{(x,y,z) \in E \mid x^2 = y\}$

Exercice 2. Pour chacune des parties suivantes de $\mathbb{R}^3$, préciser (en le justifiant) s'il s'agit d'un sous-espace vectoriel.

- $A_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x + 2y - 5z = 0\}$
- $A_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x + 2y - 5z \geq 0\}$
- $A_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x + 2y - 5z = 4\}$
- $A_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x + 2y - 5z = 0 \ et \ x - y = 0\}$
- $A_5 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x^2 = y^2\}$
- $A_6 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ \max(x,y,z) = 0\}$
- $A_7 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ (x + 2y - 5z)^2 + (x-y)^2 = 0\}$
- $A_8 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ (x + 2y - 5z)(x-y) = 0\}$

Exercice 3.

1. Soit $\mathbb{R}^2$ muni de l'addition usuelle. (($\mathbb{R}^2, +)$ est un groupe commutatif)
   (a) On considère l'opération externe suivante : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (\alpha,(x,y)) & \mapsto & \alpha.(x,y) = (\alpha x, 0) \end{array}$
   $(\mathbb{R}^2, +, .)$ est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?
   (b) Même question si l'opération externe est : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (\alpha,(x,y)) & \mapsto & \alpha.(x,y) = (x, \alpha^2 y) \end{array}$
2. Soit $H = \{a + b\sqrt{2} \ ; \ (a,b) \in \mathbb{Q}^2\}$
   (a) Montrer que $(H, +)$ est un groupe commmutatif.
   (b) Montrer que : $\forall \lambda \in \mathbb{Q} \ \ \forall x \in H \ \ \lambda x \in H$.
   (c) H est-il un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel ?
   (d) Peut-on munir H d'une opération externe sur $\mathbb{R}$ telle que H soit un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?
3. On considère $\mathbb{R}^2$ muni de l'addition usuelle et de l'opération externe sur $\mathbb{C}$ définie par :
   $$(\alpha + i\beta)(x,y) = (\alpha x - \beta y, \alpha y + \beta x), \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$
   Montrer que $\mathbb{R}^2$ est ainsi muni d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel, les sous-ensembles E_i suivants de E sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

- $E = \mathbb{R}^2$
$$E_1 = \{(x,y) \in E,\ x + 5y = 0\} \qquad E_2 = \{(x,y) \in E,\ xy \in \mathbb{Q}\}$$
$$E_3 = \{(x,y) \in E,\ x^2 + 2xy + y^2 = 0\} \qquad E_4 = \{(x,y) \in E,\ 2x + 3y = 1\}$$

- $E = \mathbb{R}^4$
$$E_1 = \{(x,y,z,t) \in E,\ 2x - y + 2z - t = 0\} \quad E_2 = \{(x,y,z,t) \in E,\ x + z = y + t \text{ et } y = t^2\}$$

- $E = F(\mathbb{R})$
$$E_1 = \{f \in E,\ f(0) = 0\} \qquad E_2 = \{f \in E,\ f(0) = -1\}$$
$$E_3 = \{f \in E,\ f \text{ paire}\} \qquad E_4 = \{f \in E,\ f \text{ impaire}\}$$
$$E_5 = \{f \in E,\ f \text{ periodique de periode } T\}$$
$$E_6 = \{f \in E,\ f \text{ continue sur [0,1] et } \int_0^1 f(t)\,dt = 0\}$$
$$E_7 = \{f \in E,\ f(x) = 0 \text{ pour une infinité de valeurs de } x\} \qquad E_8 = \{f \in E,\ f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}\}$$
$$E_9 = \{f \in E,\ (\exists n_f \in \mathbb{N}^\star)(\forall x \in \mathbb{R} \setminus [-n_f, n_f]) f(x) = 0\}$$

- $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
$$E_1 = \{(u_n) \in E,\ u_n u_{n+2} \leq 0\} \quad E_2 = \{(u_n) \in E,\ u_{n+3} = (n-1)u_n + n^2 u_{n+1} + 2(n+1)u_{n+2}\}$$

Exercice 5. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?

- $E_1 = \{P \in E,\ X^2 + 1 \text{ divise } P\}$
- $E_2 = \{P \in E,\ P(1) = 0 \text{ } ou \text{ } P(-1) = 0\}$
- $E_3 = \{P \in E,\ \deg(P) \leq 2 \text{ } et \text{ } P(0) = P(1) = 0\}$.

Exercice 6. Les ensembles suivants constituent-ils des s.e.v. ?

- C, C_0, C_1 ensembles des suites convergentes, convergentes vers 0, convergentes vers 1. (s.e.v. de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?)
- $F\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ |x| = |y|\}$, $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x + y = 0\}$. (s.e.v. de $\mathbb{R}^2$?)
- $D(\mathbb{R})$, ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. (s.e.v. de $F(\mathbb{R})$?)

Exercice 7. Soit $E = \mathbb{C}$ (que l'on considérera comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel puis comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel). Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?

- $E_1 = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ z + \overline{z} = 0\}$
- $E_2 = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| = 1\}$.

Exercice 8. Soient les vecteurs suivants dans $\mathbb{R}^3$:

$$u_1 = (2,3,-1),\ u_2 = (1,-1,-2),\ v_1 = (3,7,0),\ v_2 = (5,0,-7),\ v_3 = (0,0,1).$$

- Soit F_1 l'espace vectoriel engendré par u_1 et u_2, est-ce que v_1, v_2 et v_3 appartiennent à F_1 ?
- Soit F_2 l'espace vectoriel engendré par v_1 et v_2, montrer que $F_1 = F_2$.