L1.MASS Algèbre 2008/2009

Corrigé de la feuille 2

Exercice 1.

1. sous-espace vectoriel : B_1 est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène.
2. pas un sous-espace vectoriel : l'élément nul de $\mathbb{R}^3$ $(0,0,0)$ n'est pas dans B_2. (remarquer que B_2 est l'ensemble des solutions d'un système linéaire **non** homogène)
3. pas un s.e.v : $(2,1,0)$ est dans B_3 mais pas $-(2,1,0)=(-2,-2,0)$.
4. s.e.v : en fait on a même $B_4=\mathbb{R}^3$.
5. pas un s.e.v : $(1,1,0)$ est dans B_5 mais pas $-(1,1,0)=(-1,-1,0)$.

Exercice 2.

1. s.e.v : A_1 est l'ensemble des solution d'un système linéaire homogène.
2. pas un s.e.v : $(1,0,0)$ est dans A_2 mais pas $-(1,0,0)$.
3. s.e.v : A_3 est l'ensemble des solution d'un système linéaire homogène.
4. s.e.v : A_4 est l'ensemble des solution d'un système linéaire homogène.
5. pas un s.e.v : $(1,1,0)$ et $(1,-1,0)$ sont dans A_5 mais pas $(1,1,0)+(1,-1,0)=(2,0,0)$.
6. pas un s.e.v : $(-1,0,0)$ est dans A_6 mais pas $(1,0,0)$.
7. s.e.v : même si l'équation définissant A_7 n'est pas linéaire, on a $(x+2y-5z)^2+(x-y)^2=0$ si et seulement si $x+2y-5z$ et $x-y$ sont nuls. A_7 est donc aussi l'ensemble des solution d'un système linéaire homogène.
8. pas un s.e.v : $(2,-1,0)$ et $(1,1,0)$ sont dans A_8 mais pas $(2,-1,0)+(1,1,0)=(3,0,0)$. (Remarque : en fait A_8 est l'**union** des deux espaces vectoriels $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ ;\ x+2y-5y=0\}$ et $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ ;\ x-y=0\}$.)

Exercice 3.

Exercice 4.

1. E_1, E_3 et E_4 sont des s.e.v de $\mathbb{R}^2$: clair pour E_1 et E_4 (ensemble des solutions d'un système linéaire homogène). Pour E_3 on remarque que $x+2xy+y^2=0$ se réécrit $(x+y)^2=0$, ce qui équivaut à $x+y=0$. E_3 est donc aussi l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène.

   Pour E_2 on voit que $(1,1)$ est dans E_2 mais pas $\pi(1,1)=(\pi,\pi)$.
2. E_1 est un s.e.v de $\mathbb{R}^4$ mais pas E_2. En effet E_1 est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène. Pour E_2 on voit que $(2,0,1,1)$ est dans E_2 mais pas $-(2,0,1,1)=(-2,0,-1,-1)$.
3. Par la caractérisation classique des sous espaces vectoriels (sous ensemble non vide et stable par combinaisons linéaires) on voit que E_1, E_3, E_4, E_5, E_6 et E_9 sont des sous espaces vectoriels de E. (pour E_9 on prendra $n_{\lambda f+\mu g}=max(n_f,n_g)$). En revanche E_2, E_7 et E_8 n'en sont pas. En effet la fonction nulle n'est pas dans E_2 ; pour E_7 on remarque que les fonction $x\to(1+\sin x)^2$ et $x\to(1+\cos x)^2$ sont dans E_7 mais pas leur somme ; pour E_8 on remarque que la fonction $x\mapsto x$ est dans E_8 mais pas son opposé $x\mapsto -x$.
4. E_1 n'est pas un espace vectoriel (les suites définies pour tout n par $u_n=\begin{cases}2 & \text{si } n=4k \text{ ou } 4k+1\\ -1 & \text{si } n=4k+2 \text{ ou } 4k+3\end{cases}$

   et $v_n=\begin{cases}-1 & \text{si } n=4k \text{ ou } 4k+1\\ 2 & \text{si } n=4k+2 \text{ ou } 4k+3\end{cases}$ sont dans E_1 mais pas leur somme qui est constante à 1).

   Par la caractérisation classique, E_2 est un sous espace vectoriel de E.

Exercice 5. Les trois exemples sont des espaces vectoriels.

Exercice 6.

1. Les espaces C et C_0 sont des sous espaces vectoriels de l'ensemble des suites. C_1 n'en est pas un car il ne contient pas la suite nulle.
2. F n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ car il contient $(1,1)$ et $(1,-1)$ mais pas $(1,1)+(1,-1) = (2,0)$. G est un s.e.v de $\mathbb{R}^2$.
3. $D(\mathbb{R})$ est un s.e.v de $F(\mathbb{R})$.

Exercice 7.

Exercice 8.