**T.D.3 : Sous espaces vectoriels,
famille libre, génératrice, base.**

Exercice 1. On rappelle que si A est une partie quelconque du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, on désigne par $vect(A)$ le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A.

1. Que penser des propositions suivantes ? (Démonstration ou contre-exemple)
   (a) $(A \subset B) \Rightarrow (vect(A) \subset vect(B))$
   (b) $(vect(A) \subset vect(B)) \Rightarrow (A \subset B)$
   (c) $vect(A) \cap vect(B) = vect(A \cap B)$
   (d) $vect(A) \cup vect(B) = vect(A \cup B)$
   (e) $(vect(A) = A) \Longleftrightarrow$ (A est un sev de E)
   (f) $vect(A^c) \cup vect(A) = E$
2. On suppose $E \neq \{0_E\}$, que penser des propositions suivantes ?
   (a) $\forall (u, v, w) \in E^3 \;\; vect(u + v, w) = vect(u - v, w - v)$
   (b) $\forall (u, v, w, t) \in E^4 \;\; vect(u + t, v + w) = vect(u + v, w + t)$
   (c) $\forall (u, v, w) \in E^3 \;\; (vect(u, v) = vect(u, w)) \Longleftrightarrow (\exists \alpha \in \mathbb{K}^* \;\; w = \alpha v)$

Exercice 2. Soient les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$: $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = y\}$. Trouver une famille de vecteurs qui engendre F, puis une famille de vecteurs qui engendre G, puis $F \cap G$. Les sous-espaces vectoriels F et G sont-ils supplémentaires ? Donner une famille génératrice de $F + G$.

Exercice 3. Dans $E = \mathbb{R}^3$, soit F le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $u_1 = (1, 2, -1)$ et $u_2 = (0, -4, 1)$: $F = vect\{u_1, u_2\} = \mathbb{R}u_1 + \mathbb{R}u_2$. Soit G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $u_3 = (0, -1, 2)$: $G = vect\{u_3\} = \mathbb{R}u_3$.

1. Déterminer $F \cap G$ et en déduire que la somme $F + G$ est directe.
2. Montrer que $E = F \oplus G$.

Exercice 4.

1. Soit $a \in \mathbb{C}$. Montrer que l'ensemble des suites complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_{n+1} = au_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est une droite vectorielle de l'espace vectoriel des suites complexes.
2. Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et F le sous-espace vectoriel des suites complexes telles que $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On choisit dans un premier temps $a = 3$ et $b = -3$
   (a) Trouver deux nombres complexes α et β tels que (α^n) et (β^n) sont des suites de F.
   (b) Prouver que si (u_n) et (v_n) sont dans F et si $u_0 = v_0$ et $u_1 = v_1$, alors $u_n = v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) On note F_1 la droite vectorielle engendrée par la suite (α^n) et F_2 la droite vectorielle engendrée par la suite (β^n). Montrer que F est la somme directe de F_1 et F_2. La démarche entreprise ici pour décrire toutes les suites de F, dans le cas où $a = 3$ et $b = -3$, est-elle généralisable à d'autres valeurs pour a et b.

Exercice 5. Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note E_p le sous-espace vectoriel des fonctions paires et E_i le sous-espace vectoriel des fonctions impaires. Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = E_p + E_i$, et que cette somme est directe. Ecrire la fonction exponentielle comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exercice 6. Dans l'espace vectoriel des polynômes noté $\mathbb{R}[X]$, montrer que les polynômes $P_1(X) = 1 + X$ et $P_2(X) = 1 - X$ engendre le sous-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 1, noté $\mathbb{R}_1[X]$. Soit D la droite vectorielle engendre par le polynome $P_3(X) = X^2 + 1$. Montrer que $\mathbb{R}_1[X]$ et D sont en somme directe. Que représente le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_1[X] \oplus D$ de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 7. E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Donner une partie génératrice des sous-espaces vectoriels F de E suivants :

1. $E = \mathbb{R}^3 \quad F = \{(x, y, z\} \in E \; ; \; x + y + z = 0\}$
2. $E = \mathbb{R}^4 \quad F = \{(x, y, z, t) \in E \; ; \; 2x - y + 2z - t = 0 \; et \; x + y + z + t = 0\}$
3. $E = \mathbb{R}_3[X] \quad F = \{P \in E \; ; \; X^2 + 1 \text{ divise } P\}$

Exercice 8. Soit E un espace vectoriel et soient F, G deux sous-espaces. Montrer sur un exemple que $F \cup G$ n'est pas toujours un s.e.v.. Comparer $F \cup G$ et $F + G$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $F \cup G$ soit un s.e.v. de E.

Exercice 9. Démontrer que la famille $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ est libre dans $F(\mathbb{R})$ pour :

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(1+x^2) \end{array} \qquad f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array} \qquad f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{2x}{1+x^2} \end{array}$$

Exercice 10. On considère les vecteurs $v_1 = (1, 1, 4), \; v_2 = (3, -1, 4) \; et \; v_3 = (1, 2, 6)$

1. Les vecteurs $v_1, \; v_2 \; et \; v_3$ sont-ils linéairement indépendants ?
2. Montrer que $v_1 \; et \; v_2, \; v_1 \; et \; v_3$ ainsi que $v_2 \; et \; v_3$ sont linéairement indépendants. Quelle est la dimension de l'espace engendré par $v_1, \; v_2$ et v_3 ?

Exercice 11. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; z = 0\}$.

1. Montrer que $(1, 2, 0)$ et $(0, 1, 0)$ forment une base s.e.v. du F.
2. Trouver un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$.
3. Montrer que $(3, 2, 0)$ et $(1, 1, 2)$ n'engendrent pas F.

Exercice 12. Démontrer que $\{(1, 0, 1, 0), (1, -1, 2, 1), (-1, 1, -1, -2), (0, -1, -1, 1)\}$ constituent une base de $\mathbb{R}^4$. Exprimer les coordonnées du vecteur $(1, 2, 2, -3)$ dans cette base.

Exercice 13. Montrer que la famille $\{(1, 1, 1), (1, -1, -1)\}$ est libre dans $\mathbb{R}^3$. La compléter de façon à obtenir une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 14. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; / \; x + y + z = 0\}$

1. Montrer que F est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.
2. Trouver une famille génératrice de F. Est-ce une famille libre ?

Exercice 15. Soit $F = vect(u, v, w)$, où $u = (2, 1, -1)$, $v = (1, -1, -2)$ et $w = (-1, 4, 5)$

1. La famille $\{u, v, w\}$ est-elle libre ?
2. Définir F par des equations cartésiennes

Exercice 16. Démontrer que le système de vecteurs $u = (1, -1, 1)$, $v = (-1, 2, 1)$ et $w = (1, 0, 3)$ est lié dans $\mathbb{R}^3$. Trouver une relation entre les vecteurs u, v et w. Déterminer la forme générale d'un triplet (x, y, z) de $vect(u, v, w)$ et la dimension de $vect(u, v, w)$.

Exercice 17. Etudier la liberté de de la famille de vecteurs suivante $u = (a, 1, 1)$, $v = (1, a, -1)$ et $w = (1, -1, 0)$ dans $\mathbb{R}^3$ en fonction de a. Donner une base de $E = vect(u, v, w)$, de $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$, de $E \cap F$, et leurs dimensions. Identifier $E + F$.

Exercice 18. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; / \; x + y + z = y - 2z = 0\}$.

- Démontrer que F est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$. En donner une base.
- Donner une base et la dimension de $G = vect((2, 3, 1), (1, 2, 0), (1, 0, 2))$.
- Déterminer une représentation cartésienne de G. F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?