L1.MASS Algèbre 2008/2009

Corrigé de la feuille 3

Exercice 1.

Exercice 2.

Exercice 3.

Exercice 4.

Exercice 5.

Exercice 6.

Exercice 7.

Exercice 8.

$F \cup G$ n'est pas nécessairement un sous espace vectoriel de E. Par exemple dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$, l'union des sous espaces vectoriels $F = \{(x, y) \in E\ ,\ x = 0\}$ et $F = \{(x, y) \in E\ ,\ y = 0\}$ n'est pas un sous espace vectoriel puisque $(0, 1)$ est dans F, donc dans $F \cup G$, $(1, 0)$ est dans G, donc dans $F \cup G$, mais leur somme $(1, 1)$ n'est ni dans F, ni dans G.

On a toujour $F \cup G \subset F + G$. En effet un élément u de $F \cup G$ est soit dans F soit dans G, disons dans F pour fixer les idées. On peut alors écrire $x = x + 0$ avec $x \in F$ et $0 \in G$, donc $x \in F + G$.

La condition "$F \subset G$ ou $G \subset F$" est nécessaire et suffisante pour que $F \cup G$ soit un s.e.v de E. En effet, si $F \subset G$, on a alors $F \cup G = G$ qui est un s.e.v de E. De même, si $G \subset F$ on a $F \cup G = F$. La condition est donc suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire. Pour cela, supposons que les propositions "$F \subset G$" et "$G \subset F$" soient toutes les deux fausses. On peut alors trouver $x \in F \setminus G$ et $y \in G \setminus F$. x et y sont alors éléments de $F \cup G$, mais $x + y$ n'est ni dans F (sinon $y = (x + y) - x$ serait dans F) ni dans G (sinon $x = (x + y) - y$ serait dans G). $F \cup G$ n'est donc pas un espace vectoriel.

Exercice 9.

Exercice 10.

1. Cherchons les scalaires α, β etγ tels que $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$. Cette équation se réécrit, coordonnée par coordonnée : $\begin{cases} \alpha + 3\beta + \gamma & = 0 \\ \alpha - \beta + 2\gamma & = 0 \\ 4\alpha + 4\beta + 6\gamma & = 0 \end{cases}$. Après résolution du système, on trouve que les solutions sont de la forme $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7\lambda \\ \lambda \\ 4\lambda \end{pmatrix}$, pour un certain réel λ. La combinaison linéaire $-7v_1+v_2+4v_3$ est donc nulle bien que ses coefficients soient non nuls : la famille (v_1, v_2, v_3) est donc liée.

2. Soient λ et μ deux réels tels que $\lambda v_1+\mu v_2 = 0$. Coordonnée par coordonnée on obtient : $\begin{cases} \lambda + 3\mu & = 0 \\ \lambda - \mu & = 0 \\ 4\lambda + 4\mu & = 0 \end{cases}$.

   On a donc $\lambda = \mu$, et finalement $\lambda = \mu = 0$. La famille (v_1, v_2) est donc libre.

   Un raisonnement similaire s'applique aux familles (v_1, v_3) et (v_2, v_3).

   La famille (v_1, v_2, v_3) engendre l'espace $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$, mais elle n'est pas libre, ce n'est donc pas une base. La famille (v_1, v_2) est libre. Par le théorème de la base incomplète, il existe donc une base B de $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ avec $\{v_1, v_2\} \subset B \subset \{v_1, v_2, v_3\}$. Cette base ne peut être que $\{v_1, v_2\}$ ou $\{v_1, v_2, v_3\}$. Comme $\{v_1, v_2, v_3\}$ n'est pas une base, c'est que $\{v_1, v_2\}$ est une base. La dimension de $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ est donc 2.

Exercice 11.

1. Les deux vecteurs $(1, 2, 0)$ et $(0, 1, 0)$ ont leur troisième coordonnée nulle. Ce sont donc bien des éléments de F.

Supposons que $\lambda(1,2,0)+\mu(0,1,0)=0$, soit encore $\begin{cases}\lambda &= 0\\ 2\lambda+\mu &= 0\\ 0 &= 0\end{cases}$. L'unique solution de ce système est $\lambda=0$, $\mu=0$. En conséquence la famille est libre.

Soit (x,y,z) un élément de F. Par définition de F on peut écrire $(x,y,z)=(x,y,0)$. On remarque alors que $(x,y,0)=x(1,2,0)+(y-2x)(0,1,0)$. Par conséquent tout élement de F s'écrit comme combinaison linéaire de $(1,2,0)$ et $(0,1,0)$.

En conséquence la famille $\{(1,2,0);(0,1,0)\}$ est une famille de F a la fois libre et génératrice, c'est donc une base de F.

2. L'espace $G=\mathrm{Vect}((0,0,1))$ est un supplémentaire de F. En effet $F\bigcap G=\{(0,0,0)\}$ et $F+G=\mathbb{R}^3$.

3. Le vecteur $(1,1,2)$ n'est pas dans F. La famille $\{(3,2,0);(1,1,2,)\}$ ne peut donc pas engendrer F.

Exercice 12. Montrons tout d'abord que la famille est libre. On considère pour cela 4 scalaires réels λ_1, λ_2, λ_3 et λ_4 tels que

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\1\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\-2\end{pmatrix}+\lambda_4\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Les λ_i sont alors solution du système $\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3 &= 0\\ -\lambda_2+\lambda_3-\lambda_4 &= 0\\ \lambda_1+2\lambda_2-\lambda_3-\lambda_4 &= 0\\ \lambda_2-2\lambda_3+\lambda_4 &= 0\end{cases}$. Après résolution du système, on trouve que les λ_i sont tous nuls, la famille est donc libre.

Or l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ est de dimension 4, par conséquent toute famille libre de 4 éléments est une base, d'où le résultat.

Trouver la décomposition de $(1,2,2,-3)$ sur la base revient à chercher les solutions du système

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\1\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\-2\end{pmatrix}+\lambda_4\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\\-3.\end{pmatrix}.$$

On trouve

$$2\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\\-3.\end{pmatrix}.$$

Exercice 13. Si $\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, on a $\lambda=\mu$ et $\lambda=-\mu$, donc λ et μ sont nuls, et la famille est libre.

Par le théorème de la base incomplète, on peut compléter cette famille en une base de $\mathbb{R}^3$. Une base de $\mathbb{R}^3$ à trois éléments (puisque $\mathbb{R}^3$ est de dimensions 3). On doit donc rajouter un élément à la famille. Une famille libre de 3 él'ements étant nécessairement une base, on doit simplement trouver un élément n'appartenant pas à l'espace engendré par $(1,1,1)$ et $(1,-1,-1)$. Le vecteur $(0,0,1)$ convient. La famille $\{(1,1,1);(1,-1,-1);(0,0,1)\}$ est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 14.

1. F est un espace vectoriel comme ensemble des solutions d'un système linéaire homogène.

2. Soit (x,y,z) un élément de F. On a $x=-y-z$. En conséquence $(x,y,z)=(-y-z,y,z)=y(-1,1,0)+z(-1,0,1)$. Donc $F\subset\mathrm{Vect}((-1,1,0);(-1,0,1))$. De plus les vecteurs $(-1,1,0)$ et $(-1,0,1)$ sont éléments de F. On a donc $F=\mathrm{Vect}((-1,1,0);(-1,0,1))$.

   La famille est bien libre (car si $\lambda(-1,1,0)+\mu(-1,0,1)=(0,0,0)$ on a $\lambda=\mu=0$).

Remarque : on obtient une famille de F libre et génératrice de F. Cst donc une base de F. F est donc de dimension 2. Par conséquent, une famille génératrice à deux éléments sera nécessairement libre et une famille génératrice à 3 éléments ou plus sera liée.

Exercice 15.

1. La famille $\{u, v, w\}$ n'est pas libre car $u - 3v - w = (0, 0, 0)$.

2. Comme w est dans l'espace engendré par u et v, on a $F = \mathrm{Vect}(u, v, w) = \mathrm{Vect}(u, v)$. De plus la famille $\{u, v\}$ est libre, elle constitue donc une base de F qui est donc de dimension 2. F peut donc être décrit par une seule équation cartésienne. On cherche donc trois réels a, b, et c tels que les vecteurs u et v satisfassent l'équation $ax + by + cz = 0$. On doit donc résoudre le système $\begin{cases} 2a + b - c &= 0 \\ a - b - 2c &= 0 \end{cases}$. L'ensemble des solution est $\{(\lambda, -\lambda, \lambda)\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$. Par exemple $x - y + z = 0$ est une éuation de F.

Exercice 16.

La famille $\{u, v, w\}$ est liée car $2u + v - w = (0, 0, 0)$. Comme w est dans l'espace engendré par u et v, on a $\mathrm{Vect}(u, v, w) = \mathrm{Vect}(u, v)$. De plus la famille $\{u, v\}$ est libre, elle constitue donc une base de $\mathrm{Vect}(u, v)$ qui est donc de dimension 2. Il peut donc être décrit par une équation cartésienne. On cherche donc trois réels a, b et c tels que u et v satisfassent l'équation $ax + by + cz = 0$. On trouve par exemple (voir exercice précédent) l'équation $3x + 2y - z = 0$. Un élément général de $\mathrm{Vect}(u, v, w)$ est donc de la forme $(x, y, 3x + 2y)$, pour deux réels x et y.

Exercice 17.

On cherche les solutions (α, β, γ) de l'équation $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$. Cela revient à chercher les solutions (α, β, γ) du système linéaire paramètré par a $\begin{cases} a\alpha + \beta + \gamma &= 0 \\ \alpha + a\beta - \gamma &= 0 \\ \alpha - \beta &= 0 \end{cases}$. On trouve $(0, 0, 0)$ comme unique solution si $a \neq -1$. Si $a = -1$, on trouve pour ensemble des solutions l'ensemble $\{(\alpha, \alpha, 0)\ ,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$. La famille est donc libre pour $a \neq -1$ et liée pour $a = -1$.

Un exemple de base de F est $\{(1, -1, 0); (1, 0, -1)\}$: c'est en effet une famille libre et génératrice de F. F est donc de dimension 2.

1. Pour $a \neq -1$: la famille $\{u, v, w\}$ est une famille libre à trois éléments de $\mathbb{R}^3$. C'est donc une base de $\mathbb{R}^3$, et $E = \mathbb{R}^3$, il est donc de dimension 3. On a alors $E \cap F = F$ et $E + F = \mathbb{R}^3$.

2. Pour $a = -1$: on a $u = -v$, donc $E = \mathrm{Vect}(u, w)$. La famille $\{u, v\}$ étant libre, elle constitue une base de E, qui est donc de dimension 2. Un vecteur x de $E \cap F$ est de la forme $x = \lambda u + \mu w = (\mu - \lambda, \lambda - \mu, \lambda)$. De plus x est dans F, il doit donc satisfaire $(\mu - \lambda) + (\lambda - \mu) + \lambda = 0$, soit $\lambda = 0$. En conclusion $x = \lambda(1, -1, 0)$, et $E \cap F = \mathrm{Vect}(1, -1, 0)$. $E\cap$ est de dimension 1 et admet pour base la famille $\{(1, -1, 0)\}$. De plus on a $E + F = \mathbb{R}^3$, en effet un vecteur (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ peut se mettre sous la forme $(x, y, z) = (x + y + z)(-1, 1, 1) + (2x + y + z, -x - z, -x - y)$. Or $(x + y + z)(-1, 1, 1)$ est dans E et $(2x + y + z, -x - z, -x - y)$ est dans F.

Exercice 18.

1. F est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène, c'est donc un espace vectoriel.

   Soit (x, y, z) un élément de F. On a $\begin{cases} x + y + z &= 0 \\ y - 2z &= 0 \end{cases}$. De manière équivalente : $\begin{cases} x &= -3z \\ y &= 2z \end{cases}$. En conséquence $(x, y, z) = (-3z, 2z, z) = z(-3, 2, 1)$. Le vecteur $(-3, 2, 1)$ est bien élément de F, et finalement $F = \mathrm{Vect}(-3, 2, 1)$. Le vecteur $(-3, 2, 1)$ constitue donc à lui seul une famille libre et génératrice de F, c'en est donc une base. (Remarque : F est donc de dimension 1)

2. G est engendré par trois vecteurs, sa dimension est donc au plus 3. De plus par le théorème de la base incomplète, on peut nécessairement extraire de la famille $\{(2, 3, 1); (1, 2, 0); (1, 0, 2)\}$ une base de G.

   Remarquons tout d'abord que la famille $\{(2, 3, 1); (1, 2, 0); (1, 0, 2)\}$ est liée, en effet :

$$2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En revanche la famille $\{(2,3,1);(1,2,0)\}$ est libre et engencre également G (au vu de la relation ci-dessus), c'est donc une base de G.

3. Plus tard...