Université de Marne La vallée
Algèbre linéaire L1
2ème semestre 08/09

TD 4: Applications linéaires

Exercice 1. Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Dans l'affirmative, préciser leur noyau et leur image.

1. $u: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (3x-y,\ 5x+2y,\ x-y) \end{array}$

2. $v: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (4x-6y,\ -6x+9y) \end{array}$

3. $w: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y+z^2,\ 2x-z) \end{array}$

Exercice 2. On considère l'application:

$$\begin{array}{l} f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \to (2x-y, x+y). \end{array}$$

f est-elle linéaire ? Prouver que $f \circ f = 3(f - Id)$. En déduire que f est inversible et calculer f^{-1}.

Exercice 3. Soit l'application:

$$u: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & 2XP - (X^2+1)P' \end{array}$$

Montrer que u est une application linéaire. Déterminer alors son noyau et son image.

Exercice 4. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. On appelle projecteur de E tout endomorphisme u de E tel que $u \circ u = u^2 = u$.

1. Montrer que, si u est un projecteur de E, alors $E = \ker u \oplus Im\, u$.
2. Montrer que pour u projecteur de E, on a: $Im\, u = \{x \in E\ ;\ u(x) = x\}$.
3. Soit u un endomorphisme quelconque de E.
   (a) Montrer que $\ker u \subset \ker u^2$ et $Im\, u^2 \subset Im\, u$.
   (b) Montrer alors que :
   $$(E = \ker u + Im\, u) \Longleftrightarrow (Im\, u^2 = Im\, u)$$
   et que
   $$\ker u \cap Im\, u = \{0\} \Longleftrightarrow (\ker u^2 = \ker u)$$
4. Soit u un endomorphisme de E tel que $E = \ker u \oplus Im\, u$.
   u est-il un projecteur ? Justifier.

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que $f \circ f = id$. On pose

$$E_1 = Ker(f - id) \text{ et } E_2 = Ker(f + id).$$

1. Montrer que $E = E_1 \bigoplus E_2$.
2. Réciproquement, soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E, supplémentaires. Construire un endomorphisme u de E tel que $F = Ker(u - id)$, $G = Ker(u + id)$ et $u \circ u = id$.
3. Donner une interprétation géométrique dans le cas où $E = \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ (faire des figures).

Exercice 6. Soit E un $\mathbb{C}-$espace vectoriel et u, v deux endomorphismes de E.
Montrer que $v \circ u = 0 \Leftrightarrow \text{ Im } u \subset \ker v$. Peut-on avoir $\text{Im } u = \ker v$?

Exercice 7. Soit E un espace vectoriel, u et v deux endomorphismes de E tels que $u \circ v = v \circ u$. On dit que F, sous-espace vectoriel de E, est stable par u (resp. v) si $u(F) \subset F$, c'est-à-dire que pour $x \in F$, $u(x) \in F$.

1. Montrer que ker u et $\text{Im}\, u$ sont stables par v.
2. Montrer que ker v et $\text{Im}\, v$ sont stables par u.

Exercice 8. Démontrer qu'il existe une application linéaire f unique de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que

$$f(1,0,0) = (0,1) \qquad f(1,1,0) = (1,0) \qquad f(1,1,1) = (1,1)$$

Calculer $f(x, y, z)$. Déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 9. Démontrer qu'il existe une application linéaire f unique de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que $f(1,2) = (1,2,0)$ et $f(2,1) = (1,1,2)$. Calculer $f(x, y)$. Déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 10. Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie n ($n \geq 1$) et F un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Soient f *et* g deux applications linéaires de E vers F.

1. Comparer $Im\,(f + g)$ *et* $Im\, f + Im\, g$.
2. Démontrer que : $|rg(f) - rg(g)| \leq rg(f + g) \leq rg(f) + rg(g)$.

Exercice 11. Soient E, F et G des $\mathbb{C}-$ev de dimension finie, et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Prouver la relation

$$\dim[\text{ Im } f \cap \ker g\,] = rg(f) - rg(g \circ f)$$

.

Exercice 12. Soit E un $\mathbb{K}-$ev de dimension finie $n\,(n \geq 1)$ et f un endomorphisme nilpotent de E, c'est-à-dire tel que $\exists p \in \mathbb{N} \backslash \{0\} \quad f^p \equiv 0$. On suppose que $f^{p-1} \neq 0$.

1. Montrer que $\exists\, x_0 \in E \quad f^{p-1}(x_0) \neq 0$.
2. Montrer que la famille $(x_0, f(x_0), f^2(x_0), ..., f^{p-1}(x_0))$ est libre.
3. Comparer p et n. En déduire que $f^n \equiv 0$.