L1.MASS Algèbre 2008/2009

Corrigé de la feuille 4 (Applications linéaires)

Exercice 1. Pour vérifier qu'une application $f : E \to F$ est linéaire, il faut vérifier que pour tous scalaires λ et μ et tous éléments x et y de E, on a $f(\lambda x+\mu y) = \lambda f(x)+\mu f(y)$, ou de manière équivalente que $f(\lambda x = \lambda f(x)$ et $f(x+y)f(x)+f(y)$.

1. Soit λ et μ deux réels et (x, y) et (x', y') deux élements de $\mathbb{R}^2$. On a alors :
$$\begin{aligned} u(\lambda(x, y) + \mu(x', y')) =& u((\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y')) \\ =& (3(\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y'), 5(\lambda x + \mu x') + 2(\lambda y + \mu y'), (\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y')) \\ =& (\lambda(3x - y) + \mu(3x' - y'), \lambda(5x + 2y) + \mu(5x' + 2y'), \lambda(x - y) + \mu(x' - y')) \\ =& \lambda(3x - y, 5x + 2y, x - y) + \mu(3x' - y', 5x' + 2y', x' - y') \\ =& \lambda u((x, y)) + \mu(u((x', y')). \end{aligned}$$
u est donc bien linéaire.
2. Le même type de calcul montre que v est bien linéaire.
3. L'application w n'est pas linéaire. En effet elle vérifie $w(0, 0, 2) = (4, -2)$ qui est différent de $2w(0, 0, 1) = (2, -2)$.

Exercice 2. Par le même type de calcul qu'au premier exercice, on montre que f est linéaire. On va évaluer la valeur de la fonction $f \circ f$ au point (x, y). Par définition, on a
$$\begin{aligned} f \circ f(x, y) =& f(f(x, y)) \\ =& f(2x - y, x + y) \\ =& f(\tilde{x}, \tilde{y}) \\ =& (2\tilde{x} - \tilde{y}, \tilde{x} + \tilde{y}) \\ =& (2(2x - y) - (x + y), (2x - y) + (x + y)) \\ =& (3x - 3y, 3x) \end{aligned}$$
(on a posé pour clarifier $\tilde{x} = 2x - y$ et $\tilde{y} = x + y$).

Ensuite,
$$\begin{aligned} 3(f - Id)(x, y) &= 3(f(x, y) - Id(x, y)) \\ &= 3((2x - y, x + y) - (x, y)) \\ &= 3(2x - y - x, x + y - y) \\ &= 3(x - y, x) \\ &= (3x - 3y, 3x). \end{aligned}$$
On a bien l'égalité $f \circ f(x, y) = 3(f - Id)(x, y)$ pour tous réels x et y. Donc les fonction $f \circ f$ et $3(f - Id)$ sont égales.

L'égalité $f \circ f = 3(f - Id)$ peut se réécrire $Id = \frac{1}{3}(f - f \circ f) = f \circ \frac{1}{3}(Id - f) = \frac{1}{3}(Id - f) \circ f$. En conséquence l'application f et inversible et son inverse est $\frac{1}{3}(f - Id)$.

Exercice 3. Soient λ et μ deux réels et P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$. On a alors
$$\begin{aligned} u(\lambda P + \mu Q) &= 2X(\lambda P + \mu Q) - (X^2 + 1)(\lambda P + \mu Q)' \\ &= \lambda(2XP - (X^2 + 1)P') + \mu(2XP - (X^2 + 1)Q') \\ &= \lambda u(P) + \mu u(Q). \end{aligned}$$
L'application u est donc bien linéaire.

Cherchons le noyau de u. Soit $a+bX+cX^2$ un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ et supposons que $u(a+bX+cX^2) = 0$. On a, $u(a + bX + cX^2) = 2X(a + bX + cX^2) - (X^2 + 1)(b + 2cX) = -b + (2a - 2c)X + (2b - b)X^2 + (2c - 2c)X^3 = -b + 2(a - c)X + bX^2$. Ce dernier polynôme est nul, si et seulement si $b = 0$ et $a = c$. Le noyau de u est donc donné par $\mathrm{Ker}(u) = \{a - aX^2, a \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(1 - X^2)$. Au vu du calcul précédent, on voit que tout polynôme de l'image de u est de la forme $\lambda(1 - X^2) + \mu X$. De plus, un tel polynôme est forcément dans l'image de u : en effet $u(\frac{\mu}{2} - \lambda X) = \lambda(1 - X^2) + \mu X$. On a donc $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(1 - X^2, X)$.

Exercice 4.

1. Montrons tout d'abord que la somme Ker + Im est directe. Soit $x \in \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u)$. Comme x est dans l'image de u, on peut trouver y dans E tel que $x = u(y)$. Comme x est dans le noyau de u, on a $u(x) = 0$. Or $0 = u(x) = u(u(y)) = u^2(y) = u(y) = x$ (par hypothèse u est un projecteur donc $u^2 = u$). On a donc $x = 0$, et $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0\}$. On a bien une somme directe.

   Montrons que la somme $\mathrm{Ker}(u)+\mathrm{Im}(u)$ est l'espace tout entier. Soit $x \in E$. On a $x = x-u(x)+u(x)$. $u(x)$ est dans $\mathrm{Im}(u)$. De plus
   $$u(x - u(x)) = u(x) - u(u(x)) = u(x) - u^2(x) = u(x) - u(x) = 0.$$
   Donc $x - u(x)$ est dans $\mathrm{Ker}(u)$, et on a bien décomposé x en somme d'un élément de $\mathrm{Ker}(u)$ et d'un élément de $\mathrm{Im}(u)$.

2. Montrons tout d'abord $\{x \in E, u(x) = x\} \subset \mathrm{Im}(u)$. Si x v'erifie $x = u(x)$, alors il est bien dans l'image de u (c'est l'image de x par u). Il il reste à montrer que $\mathrm{Im}(u) \subset \{x \in E, u(x) = x\}$. Soir $x \in \mathrm{Im}(u)$. Il existe un élément y de E tel que $x = u(y)$. On a alors $u(x) = u(u(y)) = u^2(y) = u(y) = x$, on a donc bien $x = u(x)$.

3. (a) Soit x un élément de $\mathrm{Ker}(u)$. On a alors $u(x) = 0$. En conséquence, $u^2(x) = u(u(x)) = u(0) = 0$. x est donc bien un élément de $\mathrm{Ker}(u^2)$.
   Soit x un élément de $\mathrm{Im}(u^2)$. Il existe un élḿent y de E tel que $x = u^2(y) = u(u(y))$. x est alors l'image par u de $u(y)$, et donc $x \in \mathrm{Im}(u)$.

   (b)

4.

Exercice 5. Remarquons tout d'abord que x est dans E_1 si et seulement si $f(x) - x = 0$, ce qui se réecrit $f(x) = x$. e même, x est dans E_2 si et seulement si $f(x) = -x$.

1. Montrons que la somme est directe. Soit $x \in E_1 \cap E_2$. On a donc $f(x) = x$ et $f(x) = -x$. Autrement dit $x = -x$ et donc x est nul. Montrons que la somm correspond à l'espace tout entier. Soit x un élément de E. On a $x = \frac{x+f(x)}{2} + \frac{x-f(x)}{2}$. Or
   $$f(\frac{x + f(x)}{2}) = \frac{f(x) + f(f(x))}{2} = \frac{f(x) + x}{2}$$
   (car $f \circ f = id$). Donc $\frac{x+f(x)}{2}$ est dans E_1. De même, $\frac{x-f(x)}{2}$ est dans E_2. On a donc bien décomposé tout élément de E en somme d'un élément de E_1 et d'un élément de E_2.

2. Si F et G sont deux sous-espaces de E supplémentaires, on peut décomposer tout élément de E de manière unique en somme d'un élément de F et d'un élément de G. Pour $x \in E$ on pose alors $x = x_F + x_G$. On définit alors $u(x) = x_F - x_G$. On peut vérifier que cet endomorphisme satisfait toutes les conditions requises.

3. L'endomorphisme u est un symétrie par rapport à l'espace E_1, parallèlement à l'espace E_2.

Exercice 6. Supposons que $v \circ u = 0$. Soit $x \in \mathrm{Im}(u)$. Il existe un élément y de E tel que $x = u(y)$. On a alors $v(x) = v(u(y)) = v \circ u(y) = 0$, puisque $v \circ u = 0$. On a donc bien $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)$.

Supposons $\mathrm{Im}(u) =\subset \mathrm{Ker}(v)$. Soit x un élément de E. On a $u(x)$ est un élément de $\mathrm{Im}(u)$ et donc de $\mathrm{Ker}(v)$, donc $v(u(x)) = 0$. On a donc bien $v \circ u = 0$.

On peut avoir $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(v)$, par exemple pour les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ définis par $u(x, y) = (x, 0)$ et $v(x, y) = (0, y)$.

Exercice 7.

1. Soit x un élément de $\mathrm{Ker}(u)$. On a $u(v(x)) = u \circ v(x) = v \circ u(x) = v(u(x)) = v(0) = 0$. Donc $v(x)$ est annulé par u, il est dans $\mathrm{Ker}(u)$. L'espace $\mathrm{Ker}(u)$ est donc stable par v.

   Soit x un élément de $\Im(u)$. On peut écrire $x = u(y)$ pour un certain y de E. On a alors $v(x) = v(u(y)) = v \circ u(y) = u \circ v(y) = u(v(y))$, qui est l'image de $v(y)$ par u. $v(x)$ est donc dans l'image de u, et $\Im(u)$ est bien stable par v.

2. Les arguments précédents se traduisent exactement en inversant les rôles de u et v.

Exercice 8. La famille $\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ (on peut vérifier qu'elle est libre, de plus elle a trois élément, ce qui correspond à la dimension de $\mathbb{R}^3$, c'est donc une base). L'image d'une base définit toujours une unique application linéaire. On peut écrire, pour tout réels x, y et z,

$$(x,y,z) = (x-y)(1,0,0) + (y-z)(1,1,0) + z(1,1,1).$$

On a donc,par linéarité

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= (x-y)f(1,0,0) + (y-z)f(1,1,0) + zf(1,1,1) \\ &= (x-y)(0,1) + (y-z)(1,0) + z(1,1) \\ &= (y, x-y+z). \end{aligned}$$

Le noyau de f est l'ensemble des triplets (x,y,z) tels que $f(x,y,z) = (0,0)$. Autrement dit ce sont les (x,y,z) tels que $(y, x-y+z) = (0,0)$, ce qui revient à $y = 0$, $x = -z$. Ce sont donc les $(x,0,-x)$ pour x dans $\mathbb{R}$. On a : $\mathrm{Ker}(f) = \{(x,0,-x), x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(1,0,-1)$.

L'image de f est l'ensemble des éléments (a,b) de $\mathbb{R}^2$ qui peuvent s'écrire $(a,b) = f(x,y,z) = (y, x-y+z)$. On peut vérifier que l'on a $(a,b) = f(b-a, a, 0)$, pour tout réels a et b et que par conséquent, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$.

Exercice 9.

Exercice 10.

Exercice 11.

Exercice 12.