L1.2. Algèbre $\hfill$ Travaux dirigés
$2^{\text{ème}}$ semestre 08/09

T.D. 5: Applications linéaires: représentation matricielle.

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E et φ un endomorphisme de E défini par: $\varphi(e_1) = e_1 - e_2 + e_3,\ \varphi(e_2) = -2e_2 + e_3,\ \varphi(e_3) = -e_1 + e_2 - e_3$.

1. Ecrire la matrice A de φ dans la base $\mathcal{B}$.
2. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, préciser $Y = AX$.
3. Trouver le noyau de φ. φ est-il injectif ? surjectif ?

Exercice 2. Soit Φ l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans les bases canoniques respectives est :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

1. Trouver une base de $\ker \Phi$. Φ est-elle injective ?
2. Trouver une base de $\mathrm{Im}\Phi$. Φ est-elle surjective ?

Exercice 3. Calculer les produits maticiels suivants :

$a)$ $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $b)$ $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$c)$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 4. Après avoir justifié leur inversibilité, inverser par la méthode de Gauss les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 5. Soit

$$M = \begin{pmatrix} a+b & b & b \\ b & a+b & b \\ b & b & a+b \end{pmatrix} \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

1. Calculer M^2 en fonction de M et de I (matrice identité d'ordre 3)
2. Discuter l'inversibilité de M suivant les valeurs de a et de b. Déterminer, le cas échéant, son inverse.

Exercice 6. Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$
de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ représentant un endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ dans sa base canonique.

1. Calculer $(A-2I)(A-4I)$. ($I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice identité d'ordre 3)
2. Déterminer $E_2 = \ker(A-2I)$ et $E_4 = \ker(A-4I)$ ainsi que leurs dimensions respectives.
3. Montrer que $\mathbb{R}^3 = E_2 \oplus E_4$.
4. En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est diagonale. Ecrire cette matrice diagonale D ainsi que la relation entre D, A et une matrice P inversible que l'on précisera.

Exercice 7. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$. Pour $P \in E$ on pose $f(P) = (1-X)P' + 3P$ (P' est le polynôme dérivé de P).

1. Montrer que f est un endomorphisme de E et déterminer sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.
2. Donner une base et la dimension de $\ker f$ *et* $\mathrm{Im} f$. $\ker f$ *et* $\mathrm{Im} f$ sont-ils supplémentaires dans E ?
3. Soient $P_0 = 1,\ P_1 = 1-X,\ P_2 = (1-X)^2,\ P_3 = (1-X)^3$. Montrer que $\mathcal{B}' = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ est une base de E. Déterminer la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}'$.
4. Calculer $(A')^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la matrice de passage $\mathcal{P}$ de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ puis effectuer le produit matriciel $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$. Que peut-on en déduire ? Exprimer A^n en fonction des matrices A' *et* $\mathcal{P}$ et de l'entier n. (on ne demande pas de calcul explicite)

Exercice 8. Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer A^2 et vérifier que $A^2 - 5A = -4I$.
   (b) En déduire que A est inversible et calculer sa matrice inverse.
2. Plus généralement, soit M une matrice de $M_n(\mathbb{R})$
   pour laquelle il existe $p+1$ réels a_0, a_1, ..., a_p ($a_0 \neq 0$) tels que $a_0 I + a_1 M + \ldots + a_p M^p = 0$.(La matrice I désigne la matrice unité de $M_n(\mathbb{R})$). Montrer que M est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 9.

1. On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer A^2 et A^3. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) A est-elle inversible ?
2. On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on pose $B = A - I_4$. Calculer B^2 puis B^k pour tout entier $k > 2$. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Que vaut alors la matrice : $2A^n + nB^2 - (nB + I_4)^2$?

Exercice 10. Soit $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3\right)$ et A sa matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ où :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $g \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2\right)$ définie par $g(x, y, z) = (x - 2y + z, -x + z)$.

1. Quelle est l'image du vecteur $u = (2, -3)$ par l'application f ?
2. Déterminer $\mathrm{Im} f$ et un supplémentaire de $\mathrm{Im} f$.
3. Donner la matrice de g dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^2$.
4. Les applications linéaires $g \circ f$ et $f \circ g$ sont-elles définies ? Si oui, donner leurs matrices dans les bases canoniques.
5. Etablir l'expression analytique de $f \circ g$.

Exercice 11. Soient $v_1 = (8, 3, 9), v_2 = (1, 1, 1), v_3 = (7, 3, 8)$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ tel que

$$f(v_1) = 2v_1 + v_2 - v_3, f(v_2) = v_1 - v_2 + 3v_3, f(v_3) = v_1 + 5v_2 - 11v_3$$

   Ecrire la matrice de f dans la base canonique. Quels sont le rang , l'image et le noyau de f? Donner une base de chacun de ces sous-espaces.

Exercice 12. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Soit $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A.

1. Montrer que u_1, u_2, u_3 forment une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer la matrice de passage P de la base canonique dans la base u_1, u_2, u_3.
3. Calculer la matrice de passage de la base u_1, u_2, u_3 dans la base canonique.
4. Calculer la matrice de f dans la base u_1, u_2, u_3.
5. Calculer $f(u_1)$, $f(u_2)$, $f(u_3)$ dans la base canonique et puis dans u_1, u_2, u_3.
6. Retrouver la matrice de f dans u_1, u_2, u_3.

Exercice 13. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Soit f l'application linéaire de E dans E de matrice A dans la base $\mathcal{B}$. Soit u le vecteur de coordonnées (x, y, z) dans la base $\mathcal{B}$. Donner les coordonnées de $f(u)$ dans la base $\mathcal{B}$.
2. Trouver $Kerf$ et Imf.
3. Soit $v_1 = e_1 + e_2$ et $v_2 = e_1 - e_2$. Montrer que v_1 et v_2 sont libres et complèter (v_1, v_2) en une base de E par un vecteur v_3 de votre choix.
4. On note $\mathcal{B}'$ la base (v_1, v_2, v_3). Ecrire la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
5. Calculer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.
6. Choisir une base de $Kerf$ et donner ses coordonnées dans chacune des deux bases.

Exercice 14. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que

$$M(f,\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

où $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que les vecteurs $u = (-4, 3, 2)$, $v = (-4, 0, 1)$ et $w = (2, 1, 0)$ définissent une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de f dans cette base.
3. En déduire le calcul de M^n.

Exercice 15. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Soit f l'application linéaire de E dans E de matrice A dans la base $\mathcal{B}$.

1. Ecrire la matrice de f dans la base (e_2, e_1, e_3).
2. Montrer que $(e_1 + e_3, e_2, e_1 - e_2)$ est une base de E et écrire la matrice de f dans cette base.
3. Trouver $\ker f$ et Imf.

Exercice 16. Soit n un entier et

$$\begin{array}{rll} & \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow \ \mathbb{R}_{n-1}[X] \\ D : & P & \longrightarrow \ P' \end{array}$$

Démontrer que D est une application linéaire. Donnez la matrice représentative de D dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Déterminer Ker$D$, ImD. Mêmes questions avec l'application $Id - \bar{D}$ où

$$\begin{array}{rll} & \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow \ \mathbb{R}_n[X] \\ \bar{D} : & P & \longrightarrow \ P' \end{array}$$

Exercice 17. Soit m un nombre réel. Soient a, b, c des nombres réels. Résoudre le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} x & - & y & +(m-2)z = & a \\ 2x & + & (m-4)y & -2z = & b \\ (m+2)x & - & 4y & -3z = & c \end{cases}$$

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et (e_1, e_2, e_3) une base de E. Soit f l'application linéaire de E dans E telle que

$$\begin{cases} f(e_1) = & e_1 + 2e_2 + (m+2)e_3 \\ f(e_2) = & -e_1 + (m-4) - 4e_3 \\ f(e_3) & = (m-2)e_1 - 2e_2 - 3e_3 \end{cases}$$

Ecrire la matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3). Pour quelles valeurs de m f est-elle bijective ? Dans ce cas, calculer la matrice de f^{-1} dans la base (e_1, e_2, e_3). Pour quelles valeurs de m les sous-espaces vectoriels $Kerf$ et Imf sont-ils supplémentaires ?