L1.MASS Algèbre 2008/2009

Corrigé de la feuille 5 (Matrices)

Exercice 1.

1. La $i-$ème colonne de A correspond aux coordonnées de $\varphi(e_i)$ dans la base (e_1, e_2, e_3). On a donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-z \\ -x-2y+z \\ x+y-z \end{pmatrix}$$

3. Le noyau de φ est l'ensemble $\{v \in E, \varphi(v) = 0_E\}$. Un élément v de E s'écrit d'une unique manière $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$. On a alors

$$\begin{aligned} \varphi(v) &= \varphi(xe_1 + ye_2 + ze_3) \\ &= x\varphi(e_1) + y\varphi(e_2) + z\varphi(e_3) \\ &= (x-z)e_1 + (-x-2y+z)e_2 + (x+y-z)e_3. \end{aligned}$$

Un élément $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$ est donc dans $\mathrm{Ker}(\varphi)$ si et seulement si

$$\begin{cases} x - z & = 0 \\ -x - 2y + z & = 0 \\ x + y - z & = 0. \end{cases}$$

Après résolution, on trouve $x = z$, $y = 0$. Donc $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{xe_1 + xe_3, x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(e_1 + e_3)$.

φ a un noyau non réduit à zéro, il n'est donc pas injectif. Il ne peut pas non plus être surjectif en vertu de la formule du rang : $3 = \dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) + \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = 1 + \dim(\mathrm{Im}(\varphi))$. L'image de φ est donc de dimension 2, et ne peut donc pas être égale à $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2.

Exercice 3. Après calculs on trouve :

1.

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} -1 & 11 & 10 & 2 \\ -1 & 5 & -5 & 3 \\ -2 & 2 & -10 & 4 \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & -4 \\ 7 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. On trouve

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -4 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B^{-1} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 13 & -8 \\ 6 & -3 & -3 & 3 \\ 4 & 3 & -7 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

Exercice 5.

- On peut écrire $M = aI + bN$ où N est la matrice carrée de taille 3 ne comportant que des 1, et I est la matrice identité de taille 3. On a alors $M^2 = (aI + bN)(aI + bN) = a^2 I + abIN + abNI + b^2 N^2 = a^2 I + 2abN + b^2 N^2$. On remarque alors que $N^2 = 3N$, d'où $M^2 = a^2 I + (2a + 3b)bN = a^2 I + (2a + 3b)(M - aI) = (2a + 3b)M - a(a - 3b)I$.
- On peut écrire
$$a(a - 3b)I = (2a - 3b)M - M^2 = M((2a - 3b)I - M).$$
Si $a(a - 3b) \neq 0$, on a alors
$$I = M\frac{1}{a(a - 3b)}((2a - 3b)I - M),$$
et M est inversible d'inverse $\frac{1}{a(a-3b)}((2a - 3b)I - M)$.

  Si $a(a - 3b) = 0$, on a $0 = M((2a - 3b)I - M)$. Supposons que M soit inversible. En multipliant à gauche par M^{-1}, on obtiendrait $M = (2a - 3b)I$, ce qui n'est vrai que si $a = b = 0$, et M n'est alors pas inversible, d'où une contradiction : M n'est donc pas inversible.

Exercice 6.

Exercice 7.

Exercice 8.

Exercice 9.

Exercice 10.

Exercice 11.

Exercice 12.

Exercice 13.

Exercice 14.

Exercice 15.

Exercice 16.

Exercice 17.