L1.MASS Algèbre 2008/2009

Corrigé du devoir 1

Exercice 1. Après application de la méthode de Gauss, on trouve pour ensemble des solutions $\mathcal{S} = \{(3z-3, 2z-2, z)\}$.

Exercice 2. En faisont l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - mL_1$, on trouve le système

$$\begin{cases} x + (m+1)y & = m+2 \\ (4-m^2)y & = 8 - 2m - m^2 \end{cases}$$

Si $(4-m^2)$ est non nul (c'est à dire $m \neq 2$ ou -2), on peut alors diviser la deuxième ligne par $4-m^2$, et on trouve $y = \frac{8-2m-m^2}{4-m^2} = \frac{m+4}{m+2}$, ce qui donne $x = -\frac{m}{m+2}$

Si $(4-m)^2$ est nul on a alors $m = 2$ ou $m = -2$.

Dans le cas $m = 2$ on doit résoudre le système

$$\begin{cases} x + 3y & = 4 \\ 2x + 6y & = 8 \end{cases}$$

Dont les solutions sont les $(-3y, y)$ pour un réel y.

Dans le cas $m = -2$, on doit résoudre

$$\begin{cases} x - y & = 0 \\ -2x + 2y & = 8 \end{cases}$$

qui n'a pas de solutions.

En conclusion si on note $\mathcal{S}_m$ l'ensemble des solution du système avec paramètre m, on a

$$\mathcal{S}_2 = \{(-3y, y), y \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{S}_{-2} = \emptyset, \quad \mathcal{S}_m = \left\{ \left(-\frac{m}{m+2}, \frac{m+4}{m+2} \right) \right\} \text{ si } m \neq 2, -2.$$

Exercice 3. La fonction nulle $\theta : x \mapsto 0$ est dans $\mathcal{F}$ car elle vérifie $\theta(1) = 0 = 3\theta(4)$. $\mathcal{F}$ est donc non vide.

Montrons que $\mathcal{F}$ est stable par combinaison linéaire. Soient f et g deux éléments de $\mathcal{F}$ (on a donc $f(1) = 3f(4)$ et $g(1) = 3g(4)$), et λ et μ deux réels. On a alors $(\lambda f + \mu g)(1) = \lambda f(2) + \mu g(1) = \lambda(3f(4)) + \mu(3g(4)) = 3(\lambda f + \mu g)(4)$. La fonction $\lambda f + \mu g$ est donc dans $\mathcal{F}$, qui se trouve alors être stable par combinaison linéaire.

$\mathcal{F}$ est donc un espace vectoriel.