L1.2. Algèbre — Contrôle continu du 16 mars 2008

$2^{\text{ème}}$ semestre 08/09

1H30.

Exercice 1. Soit $\mathcal{U}$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des suites de nombres réels.

(1) On donne

$$\mathcal{F} = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, u_n + 2u_{n-2} = 0; n \geq 2\}$$

L'ensemble $\mathcal{F}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{U}$? Justifier la réponse.

(2) On donne

$$\mathcal{G} = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, u_n - u_{n-1}^2 = 0; n \geq 1\}$$

L'ensemble $\mathcal{G}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{U}$? Justifier la réponse.

Exercice 2. Soit

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x - y + z - 2t = 0\}$$

(1) L'ensemble F est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$? Justifier la réponse.

(2) Donner une partie génératrice de F.

Exercice 3. **Question de cours**. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $p \in \mathbb{N}^\star$, u_1,...,u_p des vecteurs de E, linéairement indépendants. Soit v un vecteur de E. Démontrer que si les $p+1$ vecteurs u_1,....,u_p,v ne sont pas linéairement indépendants, alors v s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs u_1,...,u_p.

Exercice 4. On donne le sous-espace vectoriel G de $\mathbb{R}^3$, engendré par les vecteurs :

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et } v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(1) Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ appartient-il à G ? Justifier la réponse.

(2) Soit $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \left\{ \begin{array}{ll} x - 2y & = 0 \\ x + z & = 0 \end{array} \right. \}$

Expliquer pourquoi H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Donner une partie génératrice de H.

(3) Démontrer que $G \cap H = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.