L1.MASS Algèbre 2008/2009

Corrigé du devoir 2

Exercice 1.

1. L'ensemble $\mathcal{U}$ est non vide puisqu'il contient la suite nulle $\theta_n = 0$. En effet cette suite vérifie, pour tout $n \geq 2$, $\theta_n + 2\theta_{n-2} = 0 + 2.0 = 0$.

   Si l'on considère ensuite deux éléments $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{U}$ et deux réels λ et μ, la suite $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie

   $$(\lambda u_n + \mu v_n) + 2(\lambda u_{n-2} + \mu v_{n-2}) = \lambda(u_n + 2u_{n-2}) + \mu(v_n + 2v_{n-2}) = 0.$$

   $(\lambda u_{n-2} + \mu v_{n-2})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc un élément de $\mathcal{U}$ qui est donc stable par combinaison linéaire. $\mathcal{F}$ est donc un sous espace vectoriel de $\mathcal{U}$.

2. $\mathcal{G}$ n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathcal{U}$. En effet la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout n par $u_n = 1$ est un élément de $\mathcal{G}$ puisqu'elle vérifie $u_n - u_{n-1}^2 = 1 - 1^2 = 0$. En revanche $(2u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas dans $\mathcal{G}$ car on a $(2u_n) - (2u_{n-1})^2 = 2 - 4 = -2$. $\mathcal{G}$ n'est donc pas stable par combinaison linéaire.

Exercice 2.

1. F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ comme ensemle des solution d'un système linéaire.

2. L'espace F lui-même est une partie génératrice de F. Autre possibilité, comme les éléments (x, y, z, t) de F vérifient $x - y + z - 2t = 0$, on a donc $x = y - z + 2t$, soit encore

   $$(x, y, z, t) = (y - z + 2t, y, z, t) = y(1, 1, 0, 0) + z(-1, 0, 1, 0) + t(2, 0, 0, 1).$$

   L'ensemble $\{(1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (2, 0, 0, 1)\}$ est donc une partie génératrice de F.

Exercice 3. (Question de cours) On considère des vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_p, v$ satisafisant les conditions de l'énoncé. Comme la famille $\{u_1, u_2, \ldots, u_p, v\}$ est liée, il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots \lambda_p, \lambda_v$ non tous nuls tels que $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p + \lambda_v v = 0$. Si λ_v était nul cette relation se réécrirait $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p = 0$ avec des coefficients non tous nuls (les $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \lambda_v$ ne sont pas tous nuls et $\lambda_v = 0$) c'est impossible puisque la famille $\{u_1, \ldots, u_p\}$ est supposée libre. Par conséquent, λ_v est non nul et on peut écrire :

$$v = -\frac{\lambda_1}{\lambda_v}u_1 - \ldots - \frac{\lambda_p}{\lambda_v}u_p.$$

Exercice 4.

1. $\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}$ est dans G car $2\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}$.

2. H est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène. C'est donc un sous espace vectoriel ed $\mathbb{R}^3$.

   Un élément (x, y, z) de H satisfait $x = 2y$ et $z = -2y$. On a donc $(x, y, z) = (2y, y, -2y) = y(2, 1, -2)$. Tout élément de H peut donc s'écrire comme un multiple de $(2, 1, -2)$ qui est bien un élément de H. $\{(2, 1, -2)\}$ est donc une partie génératrice de H.

3. Soit v un élément de $G \bigcap H$. Comme $v \in G$, on peut écrire $v = \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda+\mu\\\lambda+\mu\\2\lambda-\mu\end{pmatrix}$.

   De plus comme $v \in H$, on a :

   $$\begin{cases}(\lambda+\mu) - 2(\lambda+\mu) &= 0\\(\lambda+\mu) + (2\lambda-\mu) &= 0\end{cases}.$$

   Ce système a pour unique solution $\lambda = \mu = 0$. En conséquence $v = 0_{\mathbb{R}^3}$, et $G \cap H = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$