L1.2. Algèbre $\hfill$ Contrôle continu du 5 mai 2009

$2^{\text{ème}}$ semestre 08/09

Toutes les réponses doivent être justifiées

1h30.

Exercice 1. On donne le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^3$, engendré par les vecteurs :

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et } v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) Quelle est la dimension de F ? On justifiera la réponse.

(2) Donner une base de F. Complèter cette base de F en une base de $\mathbb{R}^3$.

(3) Trouver un sous-espace vectoriel supplémentaire de F (On pourra le déduire de la question (2)).

Exercice 2. (1) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soient $p \in \mathbb{N}^\star$ et u_1,...,u_p des vecteurs de E. Qu'appelle-t-on le rang de la famille de vecteurs $(u_1, ..., u_p)$?

(2) Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, on donne les quatre vecteurs suivants :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculer le rang de la famille de vecteurs (u_1, u_2, u_3, u_4).

Exercice 3. (1) Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La fonction θ de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{array}{rrl} \theta : & \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to & \mathbb{R} \\ & f \mapsto & f(2) + f(3) \end{array}$$

est-elle une application linéaire ?

(2) La fonction g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{array}{rlcl} g : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & x - y + 2 \end{array}$$

est-elle une application linéaire ?