L1.MASS Algèbre 2008/2009

Corrigé du devoir 3

Exercice 1.

1. L'espace F est par définition, engendré par la famille $\{u, v\}$, qui en est donc une famille génératrice. De plus c'est une famille libre (à vérifier), elle constitue donc une base de F, et $\dim(F) = 2$.

2. On a montré en 1 que $\{u, v\}$ est une base de F. En rajoutant à $\{u, v\}$ un élément qui n'est pas dans $Vect(u, v)$, par exemple $w = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on obtient une famille libre $\{u, v, w\}$ de trois éléments, qui est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

3. Comme $\{u, v, w\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, on a l'égalité $Vect(u, v) \oplus Vect(w) = \mathbb{R}^3$. L'espace $G = Vect(w)$ est donc un supplémentaire de F.

Exercice 2.

1. Le rang de $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est la dimension de l'espace vectoriel $Vect(u_1, u_2, \ldots, u_p)$.

2. En résolvant le système $xu_1 + yu_2 + zu_3 + tu_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on trouve pour seule solution $x = y = z = t = 0$, la famille est donc libre. Elle est donc de rang 4.

Exercice 3.

1. Si λ est un réel et f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on a

$$\theta(\lambda f) = (\lambda f)(2) + (\lambda f)(3) = \lambda(f(2) + f(3)) = \lambda\theta(f).$$

   De plus si f et g sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ on a

$$\theta(f + g) = (f + g)(2) + (f + g)(3) = (f(2) + f(3)) + (g(2) + g(3)) = \theta(f) + \theta(g).$$

   θ est donc bien linéaire.

2. On a $g(0.(1, 0)) = g(0, 0) = 0-0+2 = 2 \neq 0 = 0g(1, 0)$. La fonction g n'est donc pas une application linéaire.