

Devoir  $2\frac{1}{2}$

Durée : 40 minutes

Les calculatrices sont interdites.

On accordera un soin particulier à la rédaction.

**Exercice 1.**

1. Parmi les familles suivantes, lesquels sont libres ? Lesquelles engendrent l'espace  $E$  ? Justifier.

- La famille  $\{(1, 0, 1); (2, -1, 0); (1, 1, 3)\}$  de  $E = \mathbb{R}^3$ .
- La famille  $\{(4, 2, 1); (0, -2, 1); (1, -1, 1); (3, 1, 1)\}$  de  $E = \mathbb{R}^3$ .
- La famille  $\{(1, 2, 0, 1); (2, 0, 1, -1); (1, 1, -2, -3)\}$  de  $E = \mathbb{R}^4$ .

2. Donner une base de l'espace  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$ . Justifier.

**Exercice 2.** Précisez dans chacun des cas, en justifiant, si l'ensemble  $F$  est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel  $E$ .

1.  $E = \mathbb{R}^4$ ,  $F = \{(x, y, z, t) \in E, x + y - z + t = x + 2z - t = 0\}$ .
2.  $E = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ dérivable}\}$ ,  $F = \{f \in E, f'(x) = 3xf(x) \text{ pour tout réel } x\}$ .
3.  $E = \mathbb{R}^2$ ,  $F = \{(x, y) \in E, x + |y| = 0\}$ .
4.  $E = \mathbb{R}^3$ ,  $F = \{(x, y, z) \in E, (x + 2y - 5z)^2 + (x - y)^2 = 0\}$ .