Université Paris-Est Marne-La-Vallée
L1.MASS
2008/2009

Algèbre : partiel n°5
Durée : 1h
Les calculatrices sont interdites.
On accordera un soin particulier à la rédaction.

Exercice 1. Dans chacun des cas, dire si F est un sous espace vectoriel de E. Si c'est le cas, donner sa dimension.

1. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 = 0\}$.
2. $E = \mathbb{R}_3[X]$, $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(0) = 2\}$.

Exercice 2. On se donne un espace vectoriel E admettant une famille $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ pour base. On définit les endomorpismes φ et ψ de E dans E par les images des vecteurs de la base $\mathcal{E}$:

$$\varphi(e_1) = e_1 - e_3, \quad \varphi(e_2) = e_2 + 2e_3, \quad \varphi(e_3) = e_1 - e_2 + e_3,$$

et

$$\psi(e_1) = e_2 + e_3, \quad \psi(e_2) = e_1, \quad \psi(e_3) = e_2 - e_3.$$

1. Ecrire les matrices de φ et ψ dans la base $\mathcal{E}$.
2. Quels sont les images des vecteurs de la base $\mathcal{E}$ par l'endomorphisme composé $\varphi \circ \psi$?

Exercice 3. Donner la dimension du sous espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $(1, 0, 2, 1)$, $(2, 1, 0, -1)$ et $(0, 1, -4, -3)$, ainsi qu'un système d'équations cartésiennes le décrivant.

Exercice 4. Résoudre le système linéaire suivant

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & (m+1)y & = & 2 \\ mx & + & 6y & = & m+2 \end{array} \right.$$

(on discutera suivant la valeur du paramètre m).