Université Paris-Est Marne-La-Vallée
L1.MASS
2008/2009

Partiel n°5 d'algèbre : corrigé

Exercice 1.

1. L'équation $x^2 + y^2 = 0$ peut se réécrire $x = y = 0$. L'ensemble F est alors égal à
$$\{(0,0,z), z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((0,0,1)).$$
C'est un espace vectoriel de dimension 1.

2. Si P et Q sont deux polynômes de F, on a alors $P(0) = Q(0) = 2$, mais alors $(P+Q)(0) = 2+2 = 4$. Par conséquent, $P + Q$ n'est pas dans F, et F n'est donc pas un espace vectoriel.

Exercice 2.

1. La matrice de φ dans la base $\mathcal{E}$ est
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Celle de ψ dans la base $\mathcal{E}$ est
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. La matrice de $\varphi \circ \psi$ dans la base $\mathcal{E}$ est
$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
En lisant les colonnes de cette matrice, on trouve
$$\varphi \circ \psi(e_1) = e_1 + 3e_3, \quad \varphi \circ \psi(e_2) = e_1 - e_3, \quad \varphi \circ \psi(e_3) = -e_1 + 2e_2 + e_3.$$

Exercice 3. On cherche à caractériser l'ensemble des quadruplet (a,b,c,d) qui peuvent s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $(1,0,2,1)$, $(2,1,0,-1)$ et $(0,1,-4,-3)$. On doit donc résoudre le système
$$x(1,0,2,1) + y(2,1,0,-1) + z(0,1,-4,-3) = (a,b,c,d).$$
Ce système se réécrit
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & & & = & a \\ & & y & + & z & = & b \\ 2x & & & - & 4z & = & c \\ x & - & y & - & 3z & = & d \end{array}\right. .$$
Ce système équivaut à
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & & & = & a \\ & & y & + & z & = & b \\ & - & 4y & - & 4z & = & c-2a \\ & - & 3y & - & 3z & = & d-a \end{array}\right. ,$$
($L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$) soit encore
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & & & = & a \\ & & y & + & z & = & b \\ & & & & 0 & = & c-2a+4b \\ & & & & 0 & = & d-a+3b \end{array}\right. ,$$

($L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2$ et $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2$).

Le système à donc une solution si et seulement si $-2a + 4b + c = 0$ et $-a + 3b + d = 0$. On a décrit F par deux équations cartésiennes :

$$F = \left\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4,\ \text{tel que } -2a + 4b + c = 0 \text{ et } -a + 3b + d = 0\right\}.$$

F est décrit par deux équations linéaires indépendantes, il est donc de dimension $4 - 2 = 2$.

Exercice 4. Le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & (m+1)y & = & 2 \\ mx & + & 6y & = & m+2 \end{array}\right.$$

est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & (m+1)y & = & 2 \\ & & (6-m-m^2)y & = & 2-m \end{array}\right. \tag{1}$$

(on fait l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - mL_1$). La suite de la résolution va dépendre du fait que $6 - m - m^2$ est nul ou non. Les racines de $6 - X - X^2$ sont 2 et -3, d'où $6 - m - m^2 = (2-m)(3+m)$. On peut alors différencier les cas suivants :

- Si $m = 2$, le système (1) se récrit

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & 3y & = & 2 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}\right. .$$

Les solutions sont donc $\mathcal{S}_2 = \{(2-3y, y), y \in \mathbb{R}\}$.

- Si $m = -3$, le système (1) se réécrit

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & - & 2y & = & 2 \\ & & 0 & = & 5 \end{array}\right. .$$

Il n'y a donc pas de solutions : $\mathcal{S}_{-3} = \emptyset$.

- Si $m \neq 2, -3$ on a $(6 - m - m^2) \neq 0$, et (1) se réécrit

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & (m+1)y & = & 2 \\ & & y & = & \frac{1}{3+m} \end{array}\right. .$$

On trouve alors $x = \frac{5+m}{3+m}$. On a une unique solution : $\mathcal{S}_m = \left\{\left(\frac{5+m}{3+m}, \frac{1}{3+m}\right)\right\}$.