L1.MASS Algèbre 2008/2009

Corrigé du devoir $2\frac{1}{2}$

Exercice 1.

1. (a) La résolution du système

$$x(1,0,1)+y(2,-1,0)+z(1,1,3)=(0,0,0)$$

nous donne une combinaison linéaire nulle non triviale des trois vecteurs, par exemple

$$3(1,0,1)-(2,-1,0)-(1,1,3)=(0,0,0).$$

La famille n'est donc pas libre. De plus c'est une famille liée de trois éléments dans $\mathbb{R}^3$ (qui est de dimension 3). Elle ne peut donc pas être génératrice (rappel : en dimension n, une famille de n élément est libre si et seulement si elle est génératrice).

(b) On a une famille de quatre élément en dimension 4, elle ne peut donc pas être libre. On se fixe un élément (a,b,c) de $\mathbb{R}^3$. La résolution du système

$$x(4,2,1)+y(0,-2,1)+z(1,-1,1)+t(3,1,1)=(a,b,c)$$

nous montre que (a,b,c) ne peut s'écrire comme combinaison linéaire des quatres vecteurs que si $a-b-2c=0$. La famille n'est donc pas génératrice.

(c) On a une famille de trois éléments en dimension 3, elle ne peut donc pas être génératrice. La résolution du système

$$x(1,2,0,1)+y(2,0,1,-1)+z(1,1,-2,-3)=(0,0,0,0)$$

nous montre qu'il n'a pas d'autres solutions que $x=y=z=0$. La famille est donc libre.

2. Un vecteur de F s'écrit $(x,y,-x-y)=x(1,0,-1)+y(0,1,-1)$. La famille $\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$ est donc génératrice de F. De plus elle est libre, c'est donc une base de F.

Exercice 2.

1. F est l'ensemble des solutions d'un système linéaire **homogène**, c'est donc un sous espace vectoriel de E.

2. F est non vide : la fonction nulle $\theta : x \mapsto 0$ est dans F puisqu'elle vérifie $\theta'(x)=0=3x\theta(x)$.

   Montrons que F est stable par combinaisons linéaires : soient f et g deux éléments de F et λ et μ deux réels. On a $(\lambda f+\mu g)'(x)=\lambda f'(x)+\mu g'(x)=\lambda(3xf(x))+\mu(3xg(x))=3x(\lambda f+\mu g)(x)$. La fonction $\lambda f+\mu g$ est donc bien dans l'espace F.

   F est donc un sous espace vectoriel de E.

3. F n'est pas un sous espace vectoriel de E : en effet $(-1,1)$ est dans F mais pas $(-1).(-1,1)=(1,-1)$.

4. L'équation qui définit F se réécrit $x+2y-5z=0$ et $x-y=0$. F est donc l'espace des solutions d'un système linéaire homogène, et c'est donc bien un sous espace vectoriel de E.