Université Marne La vallée
L.1 Analyse 1
2006/2007

Feuille d'exercices 1,
majorant, minorant, borne supérieure, borne inférieure.

Exercice 1. Pour chacune des parties suivantes de $\mathbb{R}$ dire si elle est majorée ? minorée ? Si elle a une borne supérieure et/ou inférieure préciser quelle est cette borne et si elle appartient à la partie étudiée.

1. $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, l'ensemble des nombres décimaux.
2. A, l'ensemble des réels de la forme $(-1)^n$ pour un entier $n \geq 1$.
3. B, l'ensemble des réels de la forme $\dfrac{1}{n} + (-1)^n$ pour un entier $n \geq 1$.
4. C, l'ensemble des réels x tels qu'il existe un réel y pour lequel $x = \dfrac{1}{y^2} + 3$.
5. D, l'ensemble des réels x tels qu'il existe un réel y pour lequel $x = \dfrac{2y^2 - 27}{5y^2}$.

Exercice 2.

1. Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et x un réel. Transcrire dans le langage des quantificateurs les propriétés suivantes : "x est un majorant de A", "x est un minorant de A", "x est la borne supérieure de A", "x est la borne inférieure de A".
2. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Transcrire dans le langage des quantificateurs les propriétés suivantes: "A est majoré", "A est minoré", "A est borné", "A a une borne supérieure", "A a une borne inférieure".
3. Transcrire dans le langage des quantificateurs l'énoncé suivant : "Toute partie majorée de $\mathbb{R}$ a une borne supérieure".

Exercice 3. Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$.

1. (a) Montrer que $A \cup B$ est majorée si, et seulement si, les deux parties A et B sont majorées.
   (b) Lorsque A et B sont majorées, prouver que $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.
2. On pose $A + B = \{x | \text{ il existe un } a \in A \text{ et un } b \in B \text{ tels que } x = a + b\}$.
   (a) Prouver que $A + B$ est majorée si, et seulement si, les deux parties A et B sont majorées.
   (b) Lorsque A et B sont majorées, prouver que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Exercice 4. Soient A et B des parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$. Montrer que si B est majorée alors A est majorée et $\sup A \leq \sup B$.

Exercice 5. Soit A une partie bornée non vide de $\mathbb{R}$, montrer que

$$\sup_{(x,y) \in A \times A} |x - y| = \sup A - \inf A.$$

Exercice 6. Dans ce qui suit p désigne un entier non nul quelconque.

1. Soient deux réels a et b tels que $0 < a < b$. Montrer que
$$b^{p+1} - a^{p+1} = (b-a)\sum_{i=0}^{p} a^i b^{p-i}.$$
En déduire les inégalités : $(p+1)\,a^p \leq \dfrac{b^{p+1}-a^{p+1}}{b-a} \leq (p+1)\,b^p$.

2. Prouver par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} i^p \leq \frac{n^{p+1}}{p+1} \leq \sum_{i=1}^{n} i^p$.

3. Soit $u_n = \dfrac{1}{n^{p+1}}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^p$. Prouver que : $\dfrac{1}{p+1} \leq u_n \leq \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{p+1}$.

4. Donner un majorant et un minorant de $E = \{x \in \mathbb{R}/ \text{ il existe } n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } x = u_n\}$.

5. Donner la borne sup et la borne inf de E.

Exercice 7. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit la partie entière de x, notée $E(x)$, comme l'unique entier tel que $E(x) \leq x < E(x) + 1$.

1. Faire une représentation graphique de la fonction $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

2. Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $E(x+y) - E(x) - E(y) \in \{0, 1\}$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On definit $A \subset \mathbb{R}$ par $A = \{y \in \mathbb{R}, \text{il existe } n \in \mathbb{N}, y = \frac{E(10^n x)}{10^n}\}$. Montrer que A est majorée et donner sa borne supérieure.

Exercice 8. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application croissante et soit
$$A = \{x \in [0,1] \,|\, x \leq f(x)\}.$$

1. Montrer que A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.

2. On note $a = \sup A$. Montrer que $a \in [0,1]$.

3. Montrer que $f(a)$ est un majorant de A. En déduire $a \in A$.

4. On suppose $a = 1$. Montrer alors que $f(1) = 1$.

5. On suppose $a \in [0,1[$. Montrer que $f(a)$ est un minorant de $]a,1]$. En déduire que l'on a $f(a) = a$.

Exercice 9. Soient X un ensemble non vide, $f, g : X \to \mathbb{R}$ deux applications bornées. Montrer que
$$\sup_{x\in X}(f(x) + g(x)) \leq \sup_{x\in X} f(x) + \sup_{x\in X} g(x),$$
puis que
$$\sup_{x\in X} |f(x) + g(x)| \geq \left|\sup_{x\in X} |f(x)| - \sup_{x\in \mathbb{R}} |g(x)|\right|.$$