Université Marne La vallée
L.1 Analyse 1
2006/2007

Feuille d'exercices 2,
Suites réelles.

Exercice 1. Montrer par des encadrements simples que les suites suivantes convergent (en précisant leur limite):

$$u_n = \frac{n+1}{n!}, \qquad u_n = (-1)^n \frac{n+1}{n!}, \qquad u_n = \frac{2n^2-27}{5n^2},$$

$$u_n = \exp \frac{n^2}{-2+\cos n}, \qquad u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}.$$

Exercice 2.

1. Déduire de la formule du binôme que, si a est positif, alors $1 + na \leq (1+a)^n$.
2. Soit un réel a, $0 < a < 1$.
   (a) Vérifier, pour $n \geq 1$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} (1-a)^i = \frac{1-(1-a)^n}{a}$.
   (b) En déduire que $na \geq 1-(1-a)^n$ donc que $1 - na \leq (1-a)^n$.

Exercice 3. Utiliser l'exercice précédent pour prouver :

$$\begin{aligned} u_n &= \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \geq 1+\sqrt{n}, \\ 1 &\geq v_n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1-\frac{1}{n}. \end{aligned}$$

En déduire que (u_n) diverge (tend vers $+\infty$) et que (v_n) converge vers une limite à préciser.

Exercice 4.

1. Montrer, pour tout entier $n \geq 1$, les inégalités suivantes : $\displaystyle\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n^2}$.
2. En déduire, pour tout entier $n \geq 2$, les inégalités suivantes : $\displaystyle\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i^2} \leq 1 - \frac{1}{n} \leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i^2}$.
3. Que peut-on en déduire pour la suite $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$.

Exercice 5. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $u_n = \sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}$.

1. Montrer par récurrence que $u_n \geq n\sqrt{n}/2$. En déduire la limite de n/u_n.
2. Soit $v_n = u_{2n} - u_n$. Démontrer l'inégalité $n\sqrt{n+1} \leq v_n \leq n\sqrt{2n}$. En déduire la limite de v_n/n et de v_n/n^2.

Exercice 6. Les suites suivantes sont-elles croissantes? décroissantes? bornées?

$$(i) \quad \left(\frac{an+b}{n+1}\right)_{n\geq 1}, \quad (a,b)\in\mathbb{R}^2, \qquad (ii) \quad \left(n^{\frac{1}{n}}\right)_{n\geq 2} \qquad (ii) \quad \left(\frac{n^2}{2^n}\right)_{n\geq 2},$$

$$(iv) \quad \left(\frac{1}{n^2+(-1)^n}\right)_{n\geq 2}, \qquad (v) \quad \left(n+\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n\geq 1} \qquad (vi) \quad \left(\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right)_{n\geq 1}.$$

Exercice 7. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, fausses? Justifier votre réponse.

1. Si la suite (u_n^2) converge alors la suite (u_n) converge.
2. Si la suite $(\cos u_n)$ tend vers 1 alors la suite $(\sin u_n)$ est convergente.
3. Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. Si (u_n) a pour limite 0, alors il existe un entier q tel que $u_{n+1}\leq u_n$ pour tout $n\geq q$.
4. Si (u_n) est convergente alors $u_{n+1}-u_n$ tend vers 0.
5. Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. Si (u_n) est convergente alors u_{n+1}/u_n tend vers 1.
6. Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. Si u_{n+1}/u_n tend vers $3/4$, alors u_n tend vers 0.

Exercice 8. Soient (a_n) et (b_n) les suites définies par

$$a_n = \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n+1)}{2\times 4\times\cdots\times(2n)}\,\frac{1}{\sqrt{n+1}}, \qquad b_n = \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n+1)}{2\times 4\times\cdots\times(2n)}\,\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

1. Montrer que (a_n) est strictement croissante et que (b_n) est strictement décroissante.
2. On pose $t_n = \dfrac{1\times 3\times\cdots\times(2n+1)}{2\times 4\times\cdots\times(2n)}$. Montrer que
$$0 < b_n - a_n < \frac{t_n}{2n\sqrt{n}}.$$
3. Déduire des résultats précédents que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite.

Exercice 9. On considère (u_n) une suite convergente d'entiers.

1. Montrer que la limite l de cette suite est ncessairement dans $\mathbb{Z}$.
2. Etablir que l'on a nécessairement à partir d'un certain rang n_0, $u_n = l$.

Exercice 10. On définit les deux suites réelles (u_n) et (v_n) par

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_n = \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!},$$

$$\forall n\in\mathbb{N}, v_n = u_n + \frac{1}{n!}.$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, c'est à dire que la première est croissante, la seconde est décroissante, et que leur différence converge vers 0. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite.