L1.MASS Analyse 2008/2009

Corrigé de la feuille de TD 2 (Suites réelles)

Exercice 1.

Exercice 2.

Exercice 3.

Exercice 4.

Exercice 5.

Exercice 6.

Exercice 7.

1. Faux : considérer $u_n = (-1)^n$.
2. Vrai, et la limite vaut alors 0 : on a en effet $|\sin(u_n) - 0| = \sqrt{\cos^2(u_n) - 1} \underset{n\to 0}{\longrightarrow} 0$.
3. Faux : considérer $u_n \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{2}{n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$. Pour $n \geq 3$ impair, on a alors
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} = \frac{1-n}{n(n+1)} \leq 0.$$
4. Vrai : si (u_n) converge alors (u_{n+1}) aussi et leur limites sont égales. La suite $(u_{n+1} - u_n)$ est alors convergente comme différence de suites convergentes, et sa limite est $\lim_n u_{n+1} - \lim_n u_n = 0$.
5. Faux : considérer $u_n = 2^n$.
6. Vrai : par définition d'une suite convergente, il existe un entier N tel que pour $n \geq N$, on ait $|\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{3}{4}| \leq \frac{1}{8}$, et donc aussi $|\frac{u_{n+1}}{u_n}| \leq \frac{7}{8}$. Finalement
$$0 \leq u_n \leq u_N \frac{u_{N+1}}{u_N}\frac{u_{N+2}}{u_{N+1}} \cdots \frac{u_n}{u_{n-1}} \leq u_N \left(\frac{7}{8}\right)^{n-N} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice 8.

1. On a $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+3}{2n+1}\sqrt{\frac{n+1}{n+2}} = \frac{2n+3}{2\sqrt{(n+1)(n+2)}}$. On passe au carré : $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^2 = \frac{4n^2+12n+9}{4n^2+12n+8} > 1$. Comme la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}^+$, $a_{n+1} > a_n$.
2. On a $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2n+3}{2n+1}\sqrt{\frac{n}{n+1}}$. On passe au carré : $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^2 = \frac{4n^2+12n+9n}{4n^3+12n^2+12n+4} < 1$. Comme la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}^+$, $b_{n+1} < b_n$.
3. On a $a_n = \frac{t_n}{\sqrt{n+1}}$, $b_n = \frac{t_n}{\sqrt{n}}$. Comme $\sqrt{n} \leq \sqrt{n+1}$, on a bien $0 < b_n - a_n$. De plus $b_n - a_n = t_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = \frac{t_n}{\sqrt{n}}\left(1 - \sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)$. Or "$1 - \sqrt{\frac{n}{n+1}} < \frac{1}{2n}$" équivaut à "$1 - \frac{1}{2n} < \sqrt{\frac{n}{n+1}}$", qui équivaut à "$\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^2 < \frac{n}{n+1}$", qui équivaut à "$(2n-1)^2(n+1) < 4n^3$" qui est vraie.

Exercice 9.

Exercice 10.