Feuille d'exercices 3,
Continuité.

Exercice 1. Montrer que les fonctions f suivantes (définies sur $\mathbb{R}$) sont continues en 1 en appliquant successivement les deux définitions équivalentes:

D1) Définition par les (ε, δ) . Dans chacun des cas, pour $\varepsilon > 0$ arbitraire, on déterminera un réel $\delta > 0$ (dépendant de ε) tel que $|x - 1| \leq \delta$ implique $|f(x) - f(1)| \leq \varepsilon$.

D2) Définition à l'aide des suites. Pour une suite (u_n) arbitraire qui tend vers 1, appliquer ce que vous savez sur les suites pour prouver que $(f(u_n))$ tend vers $f(1)$.

$$1) \quad f(x) = |x - 1|, \quad 2) \quad f(x) = (x - 1)^5, \quad 3) \quad f(x) = (x - 1) \exp(x^7).$$

Exercice 2. Montrer que les fonctions f suivantes sont discontinues en 1 en appliquant successivement la négation des deux définitions équivalentes de la continuité :

N1) Dans chacun des cas, on donnera un $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout réel $\delta > 0$, il existe un x tel que $|x - 1| \leq \delta$ et $|f(x) - f(1)| \geq \varepsilon$.

N2) Dans chacun des cas, on donnera une suite (u_n) qui tend vers 1 et telle que $(f(u_n))$ ne tende pas vers $f(1)$.

$$1) \quad \begin{array}{l} f(x) = |x - 1| \quad \text{si } x \neq 1, \\ f(1) = 3, \end{array} \quad 2) \quad \begin{array}{l} f(x) = \frac{x-1}{|x-1|} \quad \text{si } x \neq 1, \\ f(1) = 1. \end{array}$$

Exercice 3. On note $E(x)$ la partie entière du réel x .

1. Etude de la fonction :
$$F : \begin{array}{l} [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto E(x). \end{array}$$

- (a) Montrer que cette fonction est continue en tout point de $[0, \infty[\setminus \mathbb{N}$.
- (b) Montrer qu'elle est continue à droite en tout point.
- (c) Montrer qu'elle a une limite à gauche (à préciser) en tout point entier ≥ 1 .
- (d) Montrer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} E(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} E(x) = -\infty$.
- (e) Etudier $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E(x)}{x}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{E(x)}{x}$.

2. Etude de la fonction :
$$F : \begin{array}{l}]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto E(1/x). \end{array}$$

- (a) Tracer la courbe représentative de la fonction F restreinte à $\left[\frac{1}{4}, 2\right]$.
- (b) La fonction F a-t-elle une limite à droite si x tend vers 0?
- (c) Montrer que la fonction $x \mapsto xF(x)$ définie $]0, \infty[$ a une limite à droite en 0 en donnant la valeur de la limite.

Exercice 4. On considère la fonction $F :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$.

1. Donner trois suites positives (u_n) , (v_n) , (w_n) qui convergent vers 0 et telles que

$$\lim f(u_n) = 0, \quad \lim f(v_n) = +\infty, \quad \lim f(w_n) = -\infty.$$

2. En déduire que la fonction f n'a pas de limite en 0 et qu'elle n'est pas bornée.

Exercice 5. Pour les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, prouver qu'elles sont continues en tout point de $\mathbb{R}^*$. Puis prouver qu'elles ont une limite à droite en 0 et une limite à gauche en 0 que l'on calculera. Dire enfin si elles ont un prolongement en une fonction continue en 0.

$$1) f(x) = \frac{x}{|x|}, \quad 2) f(x) = \frac{1}{x} \sin \sqrt{x^2}, \quad 3) f(x) = \frac{1}{x} \sin x^2.$$

Exercice 6. Pour les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, vérifier qu'elles sont continues en tout point de $\mathbb{R}^*$. Puis étudier si elles ont un prolongement sur $\mathbb{R}$ continu en 0.

$$f_1(x) = e^{\frac{1}{x}}, \quad f_2(x) = \frac{e^{2x} - e^x}{x}, \quad f_3(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad f_4(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exercice 7. Montrer que les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ont une limite en 0 et calculer cette limite :

$$f_1(x) = \frac{\sin 5x}{x}, \quad f_2(x) = \frac{\tan x^2}{\sin 2x^2}, \quad f_3(x) = \frac{1 - \cos 6x}{x^2}.$$

Exercice 8. Soient deux fonctions f et g à valeurs strictement positives. Il est souvent plus facile d'étudier $(\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)})$ en écrivant $\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} = \frac{f(x) - g(x)}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}}$.

1. Vérifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \frac{1}{2}$.

2. Suivant les valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$, étudier $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - ax)$.

3. Étudier $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2 (\sqrt{\cos x} - 1)}$.

4. Étudier $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sqrt{\left| \frac{1}{x} + 1 \right|} - \sqrt{\left| \frac{1}{x} - 1 \right|} \right)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\sqrt{\left| \frac{1}{x} + 1 \right|} - \sqrt{\left| \frac{1}{x} - 1 \right|} \right)$.

Exercice 9. Pour étudier f lorsque x tend vers $a \neq 0$ où f n'est pas définie, il est souvent commode de poser $u = x - a$ et $g(u) = f(u + a)$.

1. Montrer que les fonctions suivantes sont continues sur $] -3, 1[$ et sur $]1, +\infty[$. Pour chacune d'elles on étudiera l'existence d'une limite éventuelle lorsque x tend vers 1 et l'on déterminera, lorsque c'est possible, un prolongement continu sur $] -3, +\infty[$:

$$f_1(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^2 + 2x - 3}, \quad f_2(x) = \frac{(x^3 + 3x^2 - 4)^2}{x^2 + 2x - 3}, \quad f_3(x) = \frac{\sqrt{|x^3 + 3x^2 - 4|}}{x^2 + 2x - 3}.$$

2. Calculer, selon les valeurs du paramètre réel a , la limite suivante $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x - a}{\sin x}$.

Exercice 10. Pour étudier f lorsque x tend vers $\pm\infty$, il est souvent commode de poser $g(x) = f(1/x)$. Étudier les limites des fonctions suivantes si x tend vers $+\infty$:

$$g_1(x) = x \tan\left(\frac{1}{x}\right), \quad g_2(x) = x^2 \left(1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right), \quad g_3(x) = x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{2x^2}\right).$$