Université Marne La vallée
L.1 Analyse 1
2006/2007

Feuille d'exercices 4,
Fonctions continues sur un intervalle.

Exercice 1. Soit $I = [0, \pi/2[$ et $f : I \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\cos x}$. Quel est le sens de variation de f? Déterminer $f(I)$ et montrer que f définit une bijection de I sur $f(I)$.

Exercice 2. Etudier les variations de f définie par $f(x) = x^5 - 5x + 1$. En déduire que l'equation $x^5 - 5x + 1 = 0$ admet trois solutions réelles.

Exercice 3. Soit une fonction $f : [0, 1] \to [0, 1]$ continue sur $[0, 1]$. Montrer qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = x_0$ (considérer $g(x) = f(x) - x$).

Exercice 4. Soit une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, et p, q des réels strictement positif. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que: $pf(a) + qf(b) = (p + q)f(c)$. interpréter ce résultat sur le graphe de f.

Exercice 5. Principe de dichotomie.

1. Montrer que l'équation $8x^5 - 20x^2 - 3 = 0$ admet une unique solution $x_0 \in]1, 2[$.
2. En déduire que l'équation $x^8 - 4x^5 - x^3 + 1 = 0$ possède exactement deux racines réelles x_1, x_2 telles que $0 < x_1 < 1 < x_2 < 2$. En utilisant un principe de dichotomie, donner leur valeur approchée par défaut à 10^{-1} près.

Exercice 6. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue; montrer que si l'ensemble $f(I)$ est fini alors f est constante.

Exercice 7. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue et injective. Montrer que f est strictement monotone. (On pourra vérifier dans un premier temps, que si f n'est pas monotone alors il existe a, b, c des éléments de I tels que $a < b < c$ et: $(f(a) \leq f(b)$ et $f(b) \geq f(c))$ ou bien $(f(a) \geq f(b)$ et $f(b) \leq f(c))$.)

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une application continue telle que $\forall x \in]0, +\infty[$, $f(x) < x$.

1. Montrer que $f(0) = 0$.
2. Montrer que pour tous $0 < a < b$, il existe $M \in [0, 1[$ tel que $\forall x \in [a, b]$, $\quad f(x) \leq Mx$. (Considérer la fonction $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ sur $[a, b]$.)

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue telle que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

Montrer que f admet sur $\mathbb{R}$ une borne inférieure et que celle-ci est atteinte.

Exercice 10. Soit $f : [0, \pi/2[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \tan x - x$.

1. Donner le sens de variation de f et montrer que f définit une bijection de $[0, \pi/2[$ sur $[0, +\infty[$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique réel $x_n \in [0, \pi/2[$ tel que $\tan x_n = x_n + n$. Montrer que la suite (x_n) admet une limite et déterminer cette limite.

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation $x^2 \cos^n x + x \sin x + 1 = 0$ a au moins une solution dans $\mathbb{R}$.