Université Marne La vallée
L.1 Analyse 1
2006/2007

Feuille d'exercices 5,
Dérivabilité, théorème des accroissements finis.

Exercice 1. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par

$$\begin{aligned} f(x) &= x \sin\left(e^{\frac{1}{x}}\right) \quad \text{si } x \neq 0, \\ f(0) &= 0. \end{aligned}$$

1. Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est dérivable en tout point de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et calculer sa dérivée.
3. Montrer que f est dérivable à gauche en 0 et calculer cette dérivée à gauche.
4. Montrer que f n'a pas de dérivée à droite en 0.

Exercice 2. Théorème de Rolle Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$, telle que sa dérivée $n + 1$ ème existe sur $]a, b[$. Démontrer que si $f(b) = f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(n)}(a) = 0$, alors il existe $c \in]a, b[$ telle que $f^{(n+1)}(c) = 0$.

Exercice 3. Démontrer que tout polynôme $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ dont les coefficients satisfont à : $a_0 + \frac{a_1}{2} + \ldots + \frac{a_n}{n+1} = 0$ admet au moins une racine réelle dans $[0, 1]$.
(Appliquer le Théorème de Rolle à $g(x) = a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \ldots + \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$).

Exercice 4. Formule de Leibniz.

1. Soient f et g des fonctions n fois dérivables sur un intervalle I. Montrer que pour tout $x \in I$,
$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$
2. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^x$. Calculer $f^{(n)}(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. Soit f, une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{array}{ll} f(t) = e^{1/t} & \text{si} \quad t < 0 \\ f(t) = 0 & \text{si} \quad t \geq 0 \end{array}$$

1. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier en $t = 0$.
2. Etudier l'existence de $f''(0)$.
3. Démontrer par récurrence sur n que pour tout $t < 0$, $f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{t^{2n}} e^{1/t}$ où $P_n(t)$ est un polynôme dont on précisera le degré. Donnez P_1 et P_2.
4. Montrer alors que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6. Etudier, selon la valeur du paramètre $a > 0$, la dérivabilité de la fonction $f(x) = |x|^a$, $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 7. Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction définie par $f(x) = \cos\sqrt{x}$, $x \in \mathbb{R}^+$.

Exercice 8. cours Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}_*$, telle qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ avec $\lim_{x\to 0} f'(x) = l$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle de points non nuls convergente vers 0. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \frac{f(u_n)-f(0)}{u_n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $v_n \in \mathbb{R}_*$ avec $|v_n| \leq |u_n|$ et $f'(v_n) = w_n$.
2. En déduire que f est dérivable en 0 et que sa dérivée vaut l.

Exercice 9. On considère les fonctions f et g définies sur tout $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sqrt{|x|} \quad \text{et} \quad g(x) = \sin\left(\sqrt{|x|}\right).$$

1. Montrer qu'elles sont continues mais pas dérivables en 0.
2. Montrer qu'elles sont dérivables en tout point $x \neq 0$ et calculer leur dérivée.

Exercice 10. Etant donnés deux réels a et b, on considère la courbe représentative de la fonction

$$f(x) = x^3 + ax + b.$$

1. Quelle est la pente de la droite joignant deux points distincts de la courbe M_1 et M_2 de coordonnées $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$? Quelle est l'équation de cette droite ?
2. Quelle est la pente de la tangente à la courbe au point M de coordonnées $(x, f(x))$? Quelle est l'équation de cette tangente ?
3. Pour quels x la tangente obtenue en 2) est-elle parallèle à la corde obtenue en 1) ?

Exercice 11.

1. Montrer, à l'aide de la formule des accroissements finis, les inégalités suivantes :

$$e^a(b-a) \leq e^b - e^a \leq e^b(b-a) \qquad \forall a < b,$$

$$|\sin x - \sin y| \leq |x-y| \qquad \forall x, y \in R.$$

2. Etudier les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x - x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\ln(1+x)) - \sin x}{\ln(1+x) - x}.$$

Exercice 12. Soit a un paramètre réel, et P le polynôme: $P(x) = x^3 - 3x + a$.

1. Montrer que P ne peut pas avoir plus d'une racine dans l'intervalle $[-1, 1]$.
2. Pour quelles valeurs de a, y a-t-il exactement une racine dans $[-1, 1]$? Pour quelles valeurs de a, n'y a-t-il aucune racine dans $[-1, 1]$?

Exercice 13. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle donnée par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \cos u_n$.

1. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.
2. Montrer qu'il existe une et une seule valeur $l \in [0, 1]$ telle que $l = \cos l$.
3. Montrer, à l'aide du théorème des accroissements finis, que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - l| \leq (\sin 1)|u_n - l|.$$

   Conclure sur la convergence de la suite.

Exercice 14. Soit la fonction f définie pour $x \in \mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^2 \sin 1/x$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
2. Montrer que son prolongement noté $\overline{f}$ est dérivable en 0.
3. Montrer que $\overline{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $\overline{f}'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $\overline{f}'$ n'est pas continue en 0.

Exercice 15. Soit $a \in \mathbb{R}_*^+$ et $g : [-a, a] \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $[-a, a]$. Soient $M = \sup\{g(x), x \in [-a, a]\}$ et $m = \inf\{g(x), x \in [-a, a]\}$.

1. Montrer que si $m < g(-a) < M$ et $m < g(a) < M$, alors il existe $x_0 \in]-a, a[$ tel que $g''(x_0) = 0$.
2. Montrer que si g est impaire, c'est à dire que pour tout $x \in [-a, a]$, $g(-x) = -g(x)$, alors $m = -M$ et $g''(0) = 0$.
3. Donner un exemple de fonction g tel que $g(a) = m$ et pour tout $x \in [-a, a]$, $g''(x) < 0$.

Exercice 16. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deux fois dérivable, telle que $f(0) = 0$ et $f'' > 0$ sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer les dérivées première et seconde de la fonction ψ définie par $\psi(x) = \frac{f(x)}{x}$ si $x > 0$ et $\psi(0) = f'(0)$. Montrer que cette fonction est continue et strictement croissante.
2. (a) Pour $x \in]0, +\infty[$, prouver qu'il existe $c \in]0, x[$ tel que $f(x) = xf'(c)$.
   (b) Prouver l'unicité du réel c dont l'existence est donnée par la question précédente.
3. Soit g la fonction telle que $g(0) = 0$, et pour $x \in]0, +\infty[$, $g(x) = c$, où c est la valeur réelle dont l'existence et l'unicité en fonction de x sont données par la question précédente.
   (a) Prouver que g est strictement croissante et continue.
   (b) Prouver que g est dérivable sur $]0, +\infty[$.
   (c) Prouver que $\lim_{x\to 0} \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2} = \frac{1}{2}f''(0)$ et que $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x} = \frac{1}{2}$. En déduire que g possède une dérivée à droite en 0.

Exercice 17. Montrer par deux applications successives de la règle de L'Hospital que, quel que soit c réel,

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^c - cx + c - 1}{(x-1)^2} = \frac{c\,(c-1)}{2}.$$

Pour s'exercer !!

Exercice 18.

1. Montrer que les fonctions suivantes sont dérivables sur tout R et calculer leurs dérivées :

$$\left(\sin x^2\right)\left(\exp\left(x^4\right)\right), \qquad \sin\left(\cos\left(x^2\right)\right), \qquad \frac{2-\sin x}{1-\cos x}, \qquad \frac{x\sin x}{1+x^2},$$

$$\frac{x^2+x+1}{\sin x + \cos x}, \qquad (1+x)\sqrt{1+x^2}, \qquad x\sqrt{1+x^2}.$$

2. Montrer que les fonctions suivantes sont dérivables en tout point de l'ensemble $]0, \infty[$ où elles sont définies et calculer leurs dérivées.

$$\frac{x}{1+\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{1+x}, \qquad \sqrt{x+\sqrt{x}}, \qquad 2x^{1/3} - x^{-1/3}, \qquad (1+x)^{1/x}.$$

Exercice 19. Soit $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$. Etudier la fonction f, montrer qu'elle admet des asymptotes et un axe de symétrie.

Exercice 20. Etudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x} - \ln x$ sur son domaine de définition.

Exercice 21. Etudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto x^{-\ln x}$ sur son domaine de définition.

Exercice 22. Etudier la fonction $f : x \mapsto \ln(e^x + 2e^{-x})$ sur son domaine de définition.