

Corrigé de la feuille de TD 5 (Dérivabilité, théorème des valeurs intermédiaires)

Exercice 1.

1. Les fonction $x \mapsto x$, sinus et exponentielles sont continues sur $\mathbb{R}$, et la fonction $x \mapsto 1/x$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, en conséquence la fonction f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Montrons qu'elle est continue en 0. Soit (u_n) une suite de réels non nuls qui converge vers 0. On a $0 \leq |f(u_n)| = |u_n| |\sin(e^{1/u_n})| \leq |u_n|$. Par le théorème des gendarmes, la suite $(f(u_n))$ tend vers $0 = f(0)$. En conséquence, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, et f est continue en 0. f est donc continue sur $\mathbb{R}$.

2. De même qu'en 1, les fonction $x \mapsto x$, sinus et exponentielle sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto 1/x$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. On a alors

$$f'(x) = \sin(e^{1/x}) - \frac{1}{x} e^{1/x} \cos(e^{1/x}).$$

3. Soit (u_n) une suite de réels convergeant vers zéro par valeurs inférieures. On a $\frac{f(u_n) - f(0)}{u_n} = \sin(e^{1/u_n})$. Or (u_n) converge vers zéro par valeurs inférieures et $\lim_{x \rightarrow 0^-} 1/x = -\infty$. On a donc $\lim_n \frac{1}{u_n} = -\infty$, et $\lim_n e^{1/u_n} = 0$. En conséquence, $\lim_n \frac{f(u_n) - f(0)}{u_n} = \lim_x \rightarrow 0 \sin(x) = 0$. Cette limite ne dépend pas de la suite (u_n) choisie, f est donc dérivable à gauche en zéro, de dérivée 0.
4. Si on considère les suites $u_n = \frac{1}{\ln(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)}$ et $v_n = \frac{1}{\ln(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi)}$, on obtient deux suites convergeant vers zéro par valeurs supérieures. Cependant $\frac{f(u_n) - f(0)}{u_n} = 1$ et $\frac{f(v_n) - f(0)}{v_n} = -1$. Le taux d'accroissement de f en zéro n'a donc pas de limite à droite. f n'est donc pas dérivable à droite en 0.

Exercice 2. On va procéder par récurrence, en posant

$\mathcal{P}(n)$ = "Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$, admet une dérivée $n+1$ -ème sur $]a, b[$, et vérifie $f(b) = f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n)}(a) = 0$ alors il existe un c dans $]a, b[$ tel que $f^{(n+1)}(c) = 0$."

La proposition $\mathcal{P}(0)$ est l'énoncé du théorème de Rolle et est donc vraie.

Soit n un entier positif, et supposons que la proposition (n) est vraie. Considérons une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{(n+1)}$ sur $[a, b]$ et admettant une dérivée $n+2$ -ème sur $]a, b[$. Si f vérifie $f(b) = f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n+1)}(a)$, alors on peut lui appliquer le théorème de Rolle, et il existe $d \in]a, b[$ tel que $f'(d) = 0$. On peut alors appliquer la proposition $\mathcal{P}(n)$ à la fonction f' sur l'intervalle $[a, d]$. Il existe donc $c \in [a, d] \subset [a, b]$ tel que $0 = f'^{(n+1)}(c) = f^{(n+2)}(c)$. La proposition $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie. Par récurrence la proposition $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout entier n .

Exercice 3. La fonction g vérifie $g(0) = 0a_0 + 0\frac{a_1}{2} + \dots + 0\frac{a_n}{n+1} = 0$, et $g(1) = a_0 + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_n}{n+1} = 0$ (par hypothèse). De plus g est un polynôme, et est donc continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$. Par application du théorème de Rolle, il existe donc un élément c de $]0, 1[$ tel que $g'(c) = 0$. Or $g' = P$. On a donc $P(c) = 0$. P a donc une racine dans $]0, 1[$.

Exercice 4.

Exercice 5.

Exercice 6. On a pour $x > 0$, $f(x) = x^a = e^{a \ln(x)}$, et pour $x < 0$ $f(x) = (-x)^a = e^{a \ln(-x)}$. La fonction $\ln$ étant continue et dérivable sur $]0, \infty[$ et la fonction exponentielle étant continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, f est donc dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Il reste à savoir si f est dérivable en zéro. Soit (u_n) une suite convergeant vers 0. On a $\frac{f(u_n) - f(0)}{u_n} = \frac{|u_n|^a}{u_n}$. Si $a > 1$, on a $\left| \frac{f(u_n) - f(0)}{u_n} \right| = |u_n|^{a-1}$. Or $\lim_n |u_n|^{a-1} = 0$ (puisque $a > 1$). Par le théorème des gendarmes, on a donc $\lim_n \frac{f(u_n) - f(0)}{u_n} = 0$, et la fonction f est donc dérivable en 0, de dérivée 0.

Si $a \leq 1$, on a, pour $\frac{f(1/n) - f(0)}{1/n} = n^{1-a} \geq 1$, et $\frac{f(-1/n) - f(0)}{-1/n} = -n^{1-a} \leq -1$. Le taux d'accroissement de f en 0 n'a donc pas de limite en 0, et f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 7.

Exercice 8.

1. f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, elle vérifie donc les hypothèses du théorème des accroissements finis sur $[0, u_n]$, (resp. sur $[u_n, 0]$ si $u_n < 0$). Il existe donc v_n dans $]0, u_n[$ (resp. $]u_n, 0[$) tel que $f'(v_n) = \frac{f(u_n) - f(0)}{u_n} = w_n$. On a donc trouvé v_n avec $|v_n| \leq |u_n|$ et $f'(v_n) = w_n$.
2. On a $0 \leq |v_n| \leq |u_n|$. Or $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0, donc par le théorème des gendarmes, $\lim_n |v_n| = 0$, et $\lim_n v_n = 0$. Par hypothèses sur f , on a donc $\lim_n w_n = \lim_n f'(v_n) = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = l$. Quelle que soit la suite (u_n) convergeant vers 0, le taux d'accroissement $\frac{f(u_n) - f(0)}{u_n}$ converge vers l . La fonction f est donc dérivable en zéro, de dérivée l .

Exercice 9.

Exercice 10.

1. La pente est de $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(x_2^3 - x_1^3) + a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + a$. L'équation de la droite est $y = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$.
2. La pente de la droite est $f'(x_0) = 3x_0^2 + a$. L'équation de la droite est $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
3. Les droites sont parallèles lorsque leurs pentes sont égales, c'est à dire lorsque $x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 = 3x_0^2$, soit $x_0 = \pm \sqrt{\frac{x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2}{3}}$.

Exercice 11.

1. Par le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction exponentielle sur l'intervalle $[a, b]$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $\frac{e^b - e^a}{b - a} = e^c$. Or, par croissance de la fonction exponentielle, $e^a \leq e^c \leq e^b$. On a donc $e^a \leq \frac{e^b - e^a}{b - a} \leq e^b$, soit encore $(b - a)e^a \leq e^b - e^a \leq (b - a)e^b$. De même, en appliquant le théorème à la fonction sinus sur $[x, y]$, on obtient $|\frac{\sin(x) - \sin(y)}{x - y}| = |\sin(c)| \leq 1$, donc $|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$.
2. Si $x > 0$, on a $\sin(x) < x$, et par l'encadrement précédent, $e^{\sin x} \leq \frac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x - x} \leq e^x$. Or $e^{\sin x}$ et e^x convergent tous les deux vers 1 lorsque x tend vers 0. Le même raisonnement marche lorsque $x < 0$. On a donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x - x}$.

Exercice 12.

Exercice 13.

Exercice 14.

1. On a $|f(x)| = x^2 |\sin(1/x)| \leq x^2$, or x^2 tend vers 0 quand x tend vers 0. En conséquence, en posant $\bar{f}(0) = 0$ et $\bar{f}(x) = f(x)$ pour $x \neq 0$, on prolonge f en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
2. On a $\frac{\bar{f}(x) - \bar{f}(0)}{x} = x \sin(1/x)$, qui tend (pour les mêmes raisons qu'à la première question) vers 0 en 0. $\bar{f}$ est donc dérivable en 0, et $\bar{f}'(0) = 0$.
3. Pour x non nul $\bar{f}(x) = f(x)$, et on a donc $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$. Or $x \sin(1/x)$ converge vers 0 en zéro, et $\cos(1/x)$ n'a pas de limite en 0. Par conséquent, $\bar{f}'$ n'a pas de limite en zéro.

Exercice 15.

Exercice 16.

Exercice 17.

Exercice 18.

Exercice 19.

Exercice 20.

Exercice 21.

Exercice 22.