Université Marne La vallée
L.1 Analyse 1
2006/2007

Feuille d'exercices 6

Exercice 1. Démontrer les inégalités suivantes:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \;\; e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}$$

$$\forall x \in [0, \pi] \;\; \sin x \geq x - \frac{x^3}{6}.$$

Indication: on pourra utiliser la formule de Taylor-Lagrange.

Exercice 2. On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant:
$\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq M_0$ et $|f^{"}(x)| \leq M_2$, où M_0 et M_2 sont deux constantes.

1. Ecrire la formule de Taylor-Lagrange pour f entre a et $a + h$ à l'ordre $n = 1$.
2. En déduire que si $h \neq 0$, on a
$$|\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)| \leq \frac{|h|}{2} M_2$$
3. En déduire que pour tout réel a on a , pour tout $h > 0$,
$$|f'(a)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{h}{2} M_2$$
4. En déduire l'existence d'une constante M_1 vérifiant $\forall a \in \mathbb{R}$, $|f'(a)| \leq M_1$.

Exercice 3. On considère la fonction $f(x) = e^{-x^2}$.

1. Faire l'étude de f. Déterminer les points d'inflexion de f, le domaine de concavité, de convexité, puis donner la courbe représentative de f.
2. On pose $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et on prend $x > 0$. Ecrire la formule de Taylor-Lagrange pour f entre a et x à l'ordre $n = 1$. Que représentent les deux premiers termes du membre de droite?
3. En déduire la position de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente au point d'abcisse a dans le demi-plan ($x \geq 0$). Retrouver ce résultat à l'aide d'une propriété du cours.

Exercice 4. Donner les d. l. au point 0 à l'ordre 4 de

$$\frac{\sin x}{x}, \frac{x}{\sin x}, \frac{x^2}{\sin^2 x}.$$

Exercice 5. Soient

$$f(x) = 1 + 2x + x^2 + 4x^3 + x^5 \sin \frac{1}{x}, \qquad (x \neq 0)$$

$$g(x) = 3 + 7x + \frac{4}{3}x^3 + x^4 + x^{x+5}, \qquad (x > 0)$$

$$h(x) = x^2 - \frac{1}{2}x^3 - x^5 \ln x, \qquad (x > 0)$$

Ces fonctions admettent-elles des d. l. d'ordre 1,2,3,4 et 5 au point 0 ? Si oui, les écrire.

Exercice 6. Développements limités usuels.

1. Donner les développements limités au point 0 des fonctions $\exp, \cosh, \sinh, \cos, \sin$, $(1+x)^\alpha, (1+x)^{-1/2}, \frac{1}{1-x}$. Justifier avec la formule de Taylor-Lagrange.

2. En déduire les d. l. en 0 des fonctions $\ln(1+x), \arg\tanh, \arg\sinh, \arctan, \arcsin, \arccos$. On vérifiera au préalable que

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \ \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\arg\tanh'(x) = \frac{1}{1-x^2}, \ \arg\sinh'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\frac{\pi}{2} = \arcsin(x) + \arccos(x).$$

   Qu'en est-il du d. l. de $\arg\cosh$ au point 0.

3. Soit $f(x) = \tan x$.

   (a) Montrer que pour $n \geq 2$,

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k f^{(k)}(x) f^{(n-1-k)}(x).$$

   Justifier l'existance d'un d. l. de la fonction tan à tout ordre au point 0,

$$\tan(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x + x^n \varepsilon(x)$$

   . Pour $n \geq 2$ démontrer la formule de récurrence suivante sur les coefficients a_n, du d.l.,

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{n-1-k}.$$

   Donner le d. l. à l'ordre 5 de la fonction tan au point 0.

   (b) Retrouver le d. l. à l'ordre 5 de la fonction tan au point 0 en effectuant une division suivant les puissances croissantes.

Exercice 7. Calculer les développements limités suivants:
1/ $\frac{\sin x}{1+x}$ en 0, ordre 3. 2/ $\frac{x}{e^x-1}$ en 0, ordre 2.
3/ $\frac{\ln x}{x^2-1}$ en 1, ordre 2. 4/ $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$ en $+\infty$, ordre 3.

Exercice 8. Etudier la fonction $f(x) = \frac{2x^2}{e^x - e^{-x}}$ au voisinage de 0 (existence d'un prolongement par continuité, dérivabilité de ce prolongement, position relative de la courbe / tangente).

Exercice 9.

1. Donner un d. l. à l'ordre 2, au voisinage de $x = 2$, de

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x+7} - 3}.$$

2. Donner un d. l. à l'ordre 2, au voisinage de $+\infty$ de

$$g(x) = e^{\frac{1}{x}} \sqrt{1 + \frac{1}{x}}.$$

Exercice 10. Utiliser des d. l. à un ordre convenable pour étudier la disposition relative, au voisinage de leur point d'abscisse 0, des courbes représentatives des trois fonctions f, g, h, définies par

$$f(x) = \frac{2+x}{2-x}, \qquad g(x) = \frac{12+6x+x^2}{12-6x+x^2}, \qquad h(x) = e^x.$$

Exercice 11. Trouver des équivalents en 0 et en $+\infty$ de

$$\tanh \frac{1}{x} - \frac{1}{\cosh x}.$$

Exercice 12. Donner un dèveloppement limité en $x = 0$ à l'ordre 3 des fonctions

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\sinh(t)} dt,$$

(on précisera le domaine de définition de f) et

$$g(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Exercice 13. Etudier la fonction definie par

$$f(x) = (\cosh x)^{\frac{1}{x^2}}.$$

(sens de variation, etude en $+\infty$, d.l. à l'ordre 2 en 0 et interprétation géométrique, graphe)