**Université de Marne-la-Vallée** **Licence Mathématiques et Informatique, 1ère année**
**2008/2009** **Analyse 1**

**Partiel 1**
**Lundi 2 mars 2009 - Durée 1 h 00**
**Documents et calculatrice interdits**

---

**Exercice 1.**

1. Soit $A$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ ; donner la définition formelle, dans le langage des quantificateurs, de "$\alpha$ est la borne supérieure de $A$".
2. On considère les ensembles $B$ et $C$ définis par
$$B = \left\{ 1 + \frac{1}{2n} ; n \in \mathbb{N}^* \right\}, \quad C = \left\{ 1 - \frac{1}{2n+1} ; n \in \mathbb{N} \right\}.$$
Montrer que ces ensembles sont majorés et déterminer leurs bornes supérieures. On précisera, dans chacun des cas, s'il s'agit de l'élément maximum de l'ensemble.
3. En utilisant la question précédente, déterminer la borne supérieure de $A = \left\{ 1 + \frac{(-1)^n}{n} ; n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

**Exercice 2.**

Dire parmi les énoncés suivants lesquels sont vrais ou faux. Si l'enoncé est vrai, on fournira une démonstration et si l'enoncé est faux on donnera un contre exemple.

1. Toute suite croissante est convergente.
2. Toute suite convergente est monotone à partir d'un certain rang (on rappelle que monotone signifie ou bien croissante ou bien décroissante).
3. Si $(u_n)_n$ converge, alors la suite $v_n = u_{2n} - u_n$ converge.

**Exercice 3.**

1. En utilisant un encadrement, montrer que la suite $u_n = \frac{\sin n}{n}$ converge et déterminer sa limite.
2. On considère la suite $v_n = \frac{n + \sin n}{n^2 + \sqrt{n}}$, $n \geq 1$ ; déterminer la limite de $v_n$. On pourra utiliser la question précédente.