**Université Paris-Est Marne-La-Vallée**
**L1. Maths-Info**
**2008/2009**

## Corrigé du Partiel n°3, analyse

### Exercice 1.

1. On définit la fonction $f$ de $]0,\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x) - x + 1$. La fonction $f$ est dérivable comme différence de fonctions dérivables, et on a : $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$. $f'$ est donc positive sur $]0,1[$ et négative sur $]1,\infty[$. On a donc le tableau de variations suivant :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $\vert$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

   Par conséquent, $f(x)$ est négative pour $x \in ]0,\infty[$. Autrement dit $\ln(x) \leq x - 1$.

2. Soit $n$ un entier strictement positif. En appliquant l'inégalité précédente à $x = 1 + \frac{1}{n}$, on trouve :

$$\ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 1 + \frac{1}{n} - 1 = \frac{1}{n}$$

   De même on obtient l'autre inégalité en posant $x = \frac{n}{n+1}$.

3. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i} - \ln(n+1) - \sum_{i=1}^{n} + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

   par l'inégalité précédente, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

   De même,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - u_n - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

   donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

   Enfin, comme la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. Elles convergent donc, et leurs limites sont égales.

### Exercice 2.

1. Une possibilité (la plus claire) : *Soit $f$ une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés, alors il existe un réel $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$.*

   Autre possibilité : *Soit $f$ une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $k$ de $[f(a), f(b)]$ (ou $[f(b), f(a)]$ suivant les cas), il existe un réel $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = k$.*

   Encore une autre, moins explicite : *L'image d'un intervalle de $\mathbb{R}$ par une fonction continue à valeurs dans $\mathbb{R}$ est aussi un intervalle de $\mathbb{R}$.*

   Noter que l'hypothèse *"$f$ est monotone"* qui entraîne la conclusion *"$c$ est unique"* ne fait pas partie du théorème à proprement parler.

2. Soient $f : [0,1] \to [0,1]$ et $g : [0,1] \to [0,1]$ deux fonctions continues, telles que $f(0) = g(1) = 0$ et $f(1) = g(0) = 1$.

   (a) La fonction $h = f - g$ est continue comme différence de deux fonctions continues. De plus, $h(0) = f(0) - g(0) = 0 - 1 < 0$ et $h(1) = f(1) - g(1) = 1 - 0 > 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un élément $x_0$ de $[0,1]$ tel que $h(x_0) = 0$. On a donc $f(x_0) - g(x_0) = 0$, donc $f(x_0) = g(x_0)$.

   (b) Si de plus $f$ et $g$ sont strictement monotones, nécessairement, $f$ est strictement croissante et $g$ est strictement décroissante, et donc $h$ est la somme des deux fonctions strictement croissantes $f$ et $-g$, et est donc strictement croissante. En conséquence, elle ne peut s'annuler qu'en un seul point. $x_0$ est donc unique.

**Exercice 3.**

1. On pose $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 1 = 0$. La fonction $f$ est polynômiale, elle est donc dérivable. On a $f'(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x-1)$. On a alors le tableau de variations suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $\vert$ | $-$ | $\vert$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-1$ | $\searrow$ | $-3$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

   On voit donc que la fonction $f$ est inférieure à $-1$ sur l'intervalle $]-\infty, 1[$. Sur l'intervalle $[1, \infty[$, la fonction est continue, et satisfait $f(1) = -3 < 0$, et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution dans $[1, \infty[$, notée $\alpha$. Comme $f$ est strictement croissante sur $[1, \infty[$, cette solution est de plus unique.

   En résumé, l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur $]-\infty, 1]$ et en a une unique sur $[1, \infty[$. Elle a donc une unique solution sur $\mathbb{R}$.

   De plus $f(1) = -3 < 0$ et $f(2) = 7 > 0$, donc par le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ a une solution dans $]1, 2[$. Comme $\alpha$ est la seule solution sur $\mathbb{R}$, les deux solutions coïncident et $\alpha$ est donc dans $]1, 2[$.

2. Sur l'intervalle $]0, 1[$, $f$ a une dérivée strictement positive. Elle réalise donc une bijection de $[0, 1]$ sur son image qui est un intervalle dont les bornes sont données par $f(0) = -1$ et $f(1) = -3$. $f$ réalise donc une bijection de $[0, 1]$ sur $[-3, -1]$.