Université Paris-Est Marne-La-Vallée
L1. Maths-Info
2008/2009

Analyse : Partiel n°4
Durée : 1h00
Calculatrice et documents interdits

Exercice 1.

1. Enoncer le théorème de Rolle (avec ses hypothèses précises).
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On suppose que $f(a) = f(b) = f(\frac{a+b}{2})$. Démontrer qu'il existe c appartenant à $]a, b[$ tel que $f''(c) = 0$.

Exercice 2.

1. Appliquer le théorème des acccroissements finis à la fonction $f : x \mapsto x^{2/3}$ entre les points n et $n+1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1)^{2/3} - n^{2/3} < \frac{2}{3n^{1/3}}.$$
3. Déterminer alors
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1/3}}.$$

Exercice 3.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)-\ln(1+x)}{\cos(x)-1}$.

   En déduire le prolongement par continuité en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{\sin(x)-\ln(1+x)}{\cos(x)-1}$.
2. Déterminer le développement limité de $x \mapsto \tan(x)$ en 0 à l'ordre 3 (à justifier).