Université Paris-Est Marne-La-Vallée
License GSI
2009/2010

T.D. 1 : Dérivées partielles

Exercice 1. Pour les fonctions de deux variables suivantes, calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

$$f(x,y) = \tan(xy) + y, \quad f(x,y) = \frac{x+y}{1+x^2y}, \quad f(x,y) = e^{x+y}\ln\left(\frac{x}{y}\right).$$

Exercice 2. Dans chaque cas, donner l'ensemble des fonctions satisfaisant l'équation.

1. $\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + y^2 + x^3$,
2. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{(1+y)(1+x^2)}$,
3. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2$,
4. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1 + x$.

Exercice 3. Grâce au changement de variable

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u & = & xy \\ v & = & x+y \end{array} \right. ,$$

résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = x - y.$$

Exercice 4. Résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = x$$

en passant en coordonnées polaires.

Exercice 5. Résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial f}{\partial y} + y\frac{\partial f}{\partial x} = x$$

à l'aide du changement de variable

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & r\ \mathrm{ch}(\theta) \\ y & = & r\ \mathrm{sh}(\theta) \end{array} \right. .$$

Exercice 6. On s'intéresse à l'équation suivante, dite *équation des ondes* :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

Résoudre cette equation à l'aide du changement de variable

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u & = & x - ct \\ v & = & x + ct \end{array} \right. .$$

Quelle sont les possibilités si l'on impose $f(x,0) = \varphi(x)$ et $\frac{\partial f}{\partial t}(x,0) = \psi(x)$ pour deux fonctions d'une variable φ et ψ données ?