**Université Paris-Est Marne-La-Vallée**
**License GSI**
**2009/2010**

## T.D. 1 : Dérivées partielles : corrigé

**Exercice 1.** Pour les fonctions de deux variables suivantes, calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

$$f(x,y) = \tan(xy) + y, \quad f(x,y) = \frac{x+y}{1+x^2y}, \quad f(x,y) = e^{x+y}\ln\left(\frac{x}{y}\right).$$

*On trouve*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{\cos^2(xy)} = y(1+\tan^2(xy)), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{\cos^2(xy)} + 1 = x(1+\tan^2(xy)) + 1,$$

*puis*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1-x^2y+xy^2}{(1+x^2y)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1-x^3}{(1+x^2y)^2},$$

*puis*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{x+y}\left(\ln\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{x}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{x+y}\left(\ln\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{1}{y}\right).$$

**Exercice 2.** Dans chaque cas, donner l'ensemble des fonctions satisfaisant l'équation.

1. $\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + y^2 + x^3$, *on trouve* $f(x,y) = x + xy^2 + \frac{x^4}{4} + c(y)$, *où* $c$ *est une fonction quelconque.*
2. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{(1+y)(1+x^2)}$, *on trouve* $f(x,y) = \frac{\arctan(x)}{1+y} + c(y)$, *où* $c$ *est une fonction quelconque.*
3. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2$, *on trouve* $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} + c_1(y)x + c_2(y)$ *où* $c_1$ *et* $c_2$ *sont deux fonctions quelconques.*
4. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1 + x$, *on trouve* $f(x,y) = xy + \frac{x^2y}{2} + c_1(x) + c_2(y)$, *où* $c_1$ *et* $c_2$ *sont deux fonctions quelconques.*

**Exercice 3.** Grâce au changement de variable

$$\begin{cases} u = xy \\ v = x+y \end{cases},$$

résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = x - y.$$

*La formule de changement de variables nous donne :*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}y + \frac{\partial f}{\partial v}$$

*et*

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}x + \frac{\partial f}{\partial v}.$$

*On a donc :*

$$x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = (x-y)\frac{\partial f}{\partial v}.$$

*L'équation se récrit donc* $\frac{\partial f}{\partial v} = 1$. *Donc* $f(u,v) = v + C(u)$ *pour une* $C$ *une fonction de* $u$ *quelconque. En revenant aux coordonnées* $(x,y)$, *on obtient :*

$$f(x,y) = x + y + C(xy).$$

**Exercice 4.** Résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = x$$

en passant en coordonnées polaires.

*En coordonées polaires, les dérivées partielles s'écrivent (rappel : $r = \sqrt{x^2+y^2}$ et $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$) :*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{-y}{x^2(1+(y/x)^2)} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{-y}{x^2+y^2}$$

*et*

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{1}{x(1+(y/x)^2)} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{x}{x^2+y^2},$$

*de sorte que l'équation aux dérivées partielles se récrit :*

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = x = r\cos\theta.$$

*On a donc $f(r,\theta) = r\sin\theta + C(r)$, soit encore $f(x,y) = y + C(\sqrt{x^2+y^2})$.*

**Exercice 5.** Résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial f}{\partial y} + y\frac{\partial f}{\partial x} = x$$

à l'aide du changement de variable

$$\begin{cases} x &= r\ \mathrm{ch}(\theta) \\ y &= r\ \mathrm{sh}(\theta) \end{cases}.$$

**Exercice 6.** On s'intéresse à l'équation suivante, dite *équation des ondes* :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

Résoudre cette equation à l'aide du changement de variable

$$\begin{cases} u &= x - ct \\ v &= x + ct \end{cases}.$$

Quelle sont les possibilités si l'on impose $f(x,0) = \varphi(x)$ et $\frac{\partial f}{\partial t}(x,0) = \psi(x)$ pour deux fonctions d'une variable $\varphi$ et $\psi$ données ?

*Le changement de variables donne :*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}.$$

*De même, on a*

$$\frac{\partial f}{\partial y} = c\left(-\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right).$$

*On a donc*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}.$$

*De même, on trouve*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\right).$$

*L'équation se récrit donc :*

$$4\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} = 0.$$

*Cela se résoud en $f(u,v) = a(u) + b(v)$, où $a$ et $b$ sont des fonctions quelconques. On a donc $f(x,y) = a(x+ct) + b(x-ct)$.*

*Si l'on impose les conditions initiales $f(x,0) = \varphi(x)$ et $\frac{\partial f}{\partial t}(x,0) = \psi(x)$, alors $a$ et $b$ sont aussi imposés : on trouve $a(s) = \frac{1}{2}\left(\varphi + \frac{\Psi}{c}\right)$ et $b(s) = \frac{1}{2}\left(\varphi - \frac{\Psi}{c}\right)$, où $\Psi$ est une primitive de $\psi$.*