Université Paris-Est Marne-La-Vallée
License GSI
2009/2010

T.D. 2 : Équations différentielles : corrigé

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes, avec les conditions de Cauchy données.

$$y' = 7y, \quad y(0) = 3, \quad \textit{on trouve } y(x) = 3e^{7t}.$$

$$y' = x^2 y, \quad y(0) = 1, \quad \textit{on trouve } y(x) = e^{x^3/3}.$$

$$y' = 3y - 2, \quad y(0) = -1, \quad \textit{on trouve } y(x) = \frac{2 - 5e^{3t}}{3}.$$

$$y' = xy + x, \quad y(0) = -1 \ \textit{(on trouve } y(x) = -1\textit{)}, \text{ puis } y(0) = 1 \ \textit{(ici } y(x) = -1 + 2e^{x^2/2}\textit{)}.$$

Exercice 2. Résoudre le problème de Cauchy

$$xy' = 2y, \quad y(1) = 1.$$

Cela se réécrit, pour $x \neq 0$, $y' = (2/x)y$. On a donc $y(x) = C_1 x^2$ pour $x \in]0, \infty[$ et $y(x) = C_2 x^2$ pour $x \in]-\infty, 0[$. La condition $y(1) = 1$ donne $C_1 = 1$. En prolongeant y sur $\mathbb{R}$ par $y(0) = 0$, on obtient une fonction vérifiant l'équation.
A t-il une unique solution sur $\mathbb{R}$?
Non. On a une solution différente pour chaque valeur de C_1.
Pourquoi ? *La fonction $2/x$ n'est pas continue en 0.*
Donner toutes les solutions de l'équation différentielle

$$xy' = 2y.$$

Ce sont les fonctions y vérifiant $y(x) = C_1 x^2$ pour $x \geq 0$ et $y(x) = C_2 x^2$ pour $x < 0$.

Exercice 3. Le problème de Cauchy

$$xy' = y + x^2, \quad y(1) = 2$$

a t-il une unique solution sur $\mathbb{R}$? *A priori, non, car $1/x$,n'est pas continu en 0.*
Résoudre ce problème. *On trouve $y(x) = C_1 x + x^2$ pour $x > 0$ et $y(x) = C_2 x + x^2$ pour $x < 0$. La dérivabilité de y en 0 impose $C_1 = C_2$, soit $y(x) = Cx + x^2$. La condition $y(1) = 2$ donne $y(x) = x + x^2$.*

Exercice 4. Résoudre le problème de Cauchy

$$y' = \frac{y}{x} - x^2 y^4, \quad x > 0, \quad y(1) = 1.$$

On pourra chercher une équation satisfaite par la fonction $z = y^{-3}$.
Si on dérive la fonction $z = y^{-3}$, on trouve

$$z' = -3y'y^{-4} = -3(yx^{-1} - x^2y^4)y^{-4} = x^{-1}y^{-3} - x^2 = x^{-1}z - x^2,$$

et la condtion initiale s'écrit $z(1) = y(1)^{-3} = 1$. On est donc ramenés à résoudre le problème

$$z' = x^{-1}z - x^2, \quad z(1) = 1.$$

L'équation homogène $z' = z/x$ a pour solution $z = Cx$, pour $C \in \mathbb{R}$. Par variation de la constante, on trouve que les solutions sont $z = -\frac{1}{2}x^3 + Cx$. Avec la condition $z(1) = 1$, la solution est donnée par $C = 3/2$, soit encore $z = \frac{1}{2}\left(3x - x^3\right)$. Finalement, on a $y = (\frac{1}{2}\left(3x - x^3\right))^{-1/3}$. Cette fonction est définie sur $]0, \sqrt{3}[$.