

T.D. 3 : Algèbre linéaire

Exercice 1. Calculer les déterminants des matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Résoudre les équations suivantes :

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Calculer le polynôme caractéristique de chacune des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En déduire leurs valeurs propres.

Exercice 4. Parmi les matrices données à l'exercice 3, lesquelles sont diagonalisables ? Pour celles qui le sont, on donnera leur diagonalisation.

Exercice 5. Résoudre le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} x' = -2x + y - z \\ y' = -2x + 2y \\ z' = 4x - y + 3z \end{cases}, \quad x(0) = -1, y(0) = 0, z(0) = 2.$$