Université Paris-Est Marne-La-Vallée
License GSI
2009/2010

T.D. 3 : Algèbre linéaire : corrigé

Exercice 1. Calculer les déterminants des matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On trouve

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 10, \quad \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 10.$$

Exercice 2. Résoudre les équations suivantes :

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \textit{on a } S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \textit{on a } S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x/2 \\ 2x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \textit{on a } S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x/2 \\ -x/2 \end{pmatrix}, \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \textit{on a } S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2y - x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 3. Calculer le polynôme caractéristique de chacune des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En déduire leur valeurs propres. *On trouve respectivement*

$$X^2 - 4X + 5 = (X - (2+i))(X - (2-i)), \ \textit{les valeurs propres sont donc } 2+i \textit{ et } 2-i,$$

$$-X^3 + 1 = -(X-1)\left(X - \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right), \ \textit{valeurs propres } 1, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2},$$

$$X^3 + 2X^2 - 3X = X(X-1)(X-2), \ \textit{v.p. } 0, 1, 2,$$

et

$$X^2, \ \textit{valeurs propres } 0 \textit{ et } 0 \textit{ (valeur propre "double").}$$

Exercice 4. Parmi les matrices données à l'exercice 3, lesquelles sont diagonalisables ? Pour celles qui le sont, on donnera leur diagonalisation.

On trouve :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -i/2 \\ 1/2 & i/2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix}, \ \textit{avec } j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2},$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *n'est pas diagonalisable, en effet elle n'a qu'un seul vecteur propre* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *qui ne constitue donc pas une base.*

Exercice 5. Résoudre le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} x' = & -2x + y - z \\ y' = & -2x + 2y \\ z' = & 4x - y + 3z \end{cases}, \quad x(0) = -1, y(0) = 0, z(0) = 2.$$

On doit regarder les éléments propres de la matrice

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique est $-X^3 + 3X^2 - 2X = -X(X-1)(X-2)$. *Les valeures propres de la matrice sont donc* 0, 1 *et* 2. *Des vecteurs propres qui leur sont respectivement associés sont* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Les solutions du système sont donc les fonction s de la forme*

$$\begin{cases} x(t) & = a + be^t \\ y(t) & = a + 2be^t + ce^{2t} \\ z(t) & = -a - be^t + ce^{2t} \end{cases}.$$

Comme le vecteur $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ *s'écrit* $(-1) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 0 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, *on a* $a = -1$, $b = 0$ *et* $c = 1$, *donc*

$$\begin{cases} x(t) & = -1 \\ y(t) & = -1 + e^{2t} \\ z(t) & = 1 + e^{2t} \end{cases}.$$