Université Paris-Est Marne-La-Vallée
License GSI
2009/2010

T.D. 4 : Equations différentielles (2) : corrigé

Exercice 1. Résoudre les systèmes d'équations différentielles suivants

$$\begin{cases} x' = & x-4y \\ y' = & -2x-y \end{cases}, \quad x(0)=0, y(0)=3,$$

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ *a pour polynôme caractéristique* $(X+3)(X-3)$*. Ses valeurs propres sont donc* ± 3*, et des vecteurs associés sont* $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$*. On a donc*

$$\begin{cases} x(t) = & 2ae^{3t}+be^{-3t} \\ y(t) = & -ae^{3t}+be^{-3t} \end{cases}.$$

Les conditions initiales imposent $a=-1$ *et* $b=2$ *:*

$$\begin{cases} x(t) = & -2e^{3t}+2e^{-3t} \\ y(t) = & e^{3t}+2e^{-3t} \end{cases}.$$

$$\begin{cases} x' = x-3y \\ y' = 3x+y \end{cases}, \quad x(0)=1, y(0)=0,$$

On trouve :

$$\begin{cases} x(t) = & \frac{1}{2}\left(e^{(1+3i)t}+e^{(1-3i)t}\right) = e^t\cos(3t) \\ y(t) = & \frac{1}{2i}\left(e^{(1+3i)t}-e^{(1-3i)t}\right) = e^t\sin(3t) \end{cases}.$$

$$\begin{cases} x' = -x+y-2t+1 \\ y' = x-y+2t-1 \end{cases}, \quad x(0)=1, y(0)=2.$$

On trouve :

$$\begin{cases} x(t) = & -t+\frac{1}{2}(5-3e^{-2t}) \\ y(t) = & t+\frac{1}{2}(1+3e^{-2t}) \end{cases}.$$

Exercice 2. Résoudre les équations

$$y' = e^{-x}y^3, \quad y(0)=1/2, \text{ puis } y(0)=1,$$

$$y' = \sqrt{|x|}y^2, \quad y(0)=1.$$

L'équation $-\frac{1}{2}(y^{-2})' = \frac{y'}{y^3} = e^{-x}$ *entraîne* $y^{-2} = 2e^{-x}+C$*, où* C *est une constante. On a donc* $y(x) = \frac{1}{\sqrt{C+2e^{-x}}}$*. Pour* $y(0)=1/2$*, on a donc* $C=2$*, et* $y(x)=\frac{1}{\sqrt{2+2e^{-x}}}$*, qui est une fonction définie sur* $\mathbb{R}$*. Cette fonction ne s'annulle pas, les calculs effectués jusque là étaient donc licites.*

Pour $y(0)=1$*, on trouve* $C=-1$*. On a alors* $y(x)=\frac{1}{\sqrt{-1+2e^{-x}}}$ *qui n'est défini que lorsque* $2e^x-1>0$*, c'est à dire lorsque* $x>-\ln 2$*. On a donc une solution sur* $]-\ln 2,\infty[$*. On trouve également une fonction qui ne s'annulle pas.*

L'éqation $-(y^{-1})' = \frac{y'}{y^2} = \sqrt{|x|}$ *implique* $y^{-1} = \frac{2}{3}x\sqrt{|x[}+C$ *pour une certaine constante* C*. Pour* $y(0)=1$*, on trouve donc* $y(x)=(\frac{3}{2}x\sqrt{|x|}+1)^{-1}$*, qui est défini sur* $]-(2/3)^{-2/3},\infty[$*. Cette fonction ne s'annulle pas, justifiant les calculs précédents.*

Exercice 3. Résoudre les équations (une solution particulière pourra être cherchée sous la forme d'un polynôme)

$$y'' + y' + y = x^2 + x + 1,$$

$$y'''' = y,$$

$$y'' - 4y' + 5y = x,$$

$$y'' - 2y' + y = x.$$

Le polynôme $X + X + 1$ a pour racines $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$. L'équation $y'' + y' + y = 0$ a donc pour solutions $y_g = Ae^{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x} + Be^{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x}$. En cherchant une solution particulière sous forme de polynôme, on trouve : $y(x) = Ae^{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x} + Be^{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x} + x^2 - x$.

L'équation $y'''' = y$ a pour solutions $y(x) = Ae^x + Be^{ix} + Ce^{-x} + De^{-ix}$.

L'équation $y'' - 4y' + 5y = 0$ a pour solutions $y_g = Ae^{2(1+i)x} + Be^{2(1-i)x}$. On trouve donc $y(x) = \frac{5x+4}{25} + Ae^{2(1+i)x} + Be^{2(1-i)x}$.

Le polynôme $X^2 - 2X + 1$ admet 1 comme racine double, les solutions de l'équation homogène sont $y(x) = Ae^x + Bxe^x$. Avec une solution particulière, on trouve $y(x) = x + 2 + Ae^x + Bxe^x$.

Exercice 4. Résoudre l'équation

$$y' = \sqrt{y}, y(0) = 0.$$

On remarque tout d'abord que la fontion définie pour tout x par $y(x) = 0$ est solution. Si la fontion n'est pas uniformément nulle soit x_0 tel que $y(x_0) \neq 0$. On doit pouvoir appliquer une racine carrée à y, donc y doit être une fonction positive. On a donc $y(x_0) > 0$. Autour de x_0, on peut diviser par y, et on trouve donc $1 = \frac{y'}{\sqrt{y}} = 2\left(\sqrt{y}\right)'$. On a alors $\sqrt{y} = \frac{x+C}{2}$, pour une certaine constante C. Comme $\sqrt{y}(x_0) > 0$, on a $C > -x_0$. En passant à la racine carrée on trouve (comme $y > 0$) $y(x) = (\frac{x+C}{2})^2$. Ceci est une solution ne s'annullant pas sur $]-C, \infty[$. Les calculs précédents étaient donc autorisés, et on a trouvé l'unique solution de notre équation. La fonction y vérifie $y' = \sqrt{y} \geq 0$, elle est donc croissante. Comme elle est de plus positive et nulle en $-C$, on a $y(x) = 0$ pour tout x de $]-\infty, -C[$. On a donc $y(x) = \begin{cases} (\frac{x+C}{2})^2 \text{ pour } x \geq -C \\ 0 \text{ pour } x \leq -C \end{cases}$. La condition $y(0) = 0$ impose seulement $C \leq 0$.