Université Paris-Est Marne-La-Vallée
License GSI
2009/2010

T.D. 5 : Intégrales multiples

Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} (x^2 - xy + 4y^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\iint_{[0,1]\times[0,2]} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Exercice 2. Calculer la surface du disque D_a de rayon a de deux manières :

- en décomposant

$$\iint_{D_a} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-a}^{a} \left(\int_?^? \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

- à l'aide d'un changement de variable polaire.

Même exercice pour le volume de la boule B_a de rayon a :

- en décomposant

$$\iiint_{B_a} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{-a}^{a} \left(\int_?^? \left(\int_?^? \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z.$$

- à l'aide d'un changement de variable sphérique.

Exercice 3. Calculer

$$\iiint_\Omega \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}$$

où $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$.

Exercice 4. Calculer

$$\int_\Omega e^{\frac{x-y}{x+y}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

où $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0, 1/2 \leq x+y \leq 1\}$. On pourra considérer le changement de variable

$$\begin{cases} u = & x+y \\ v = & x-y \end{cases}.$$

Exercice 5. On cherche à calculer la quantité $I = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\mathrm{d}x$. Montrer que $I^2 = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^\infty re^{-r^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$. En déduire la valeur de I.

Exercice 6. Calculer

$$\iint_\Omega (x^2-y^2)\cos(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

où $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 2 < x+y < 4, xy > 1, x > y\}$, à l'aide du changement de variable

$$\begin{cases} u = & x+y \\ v = & xy \end{cases}.$$