Université Paris-Est Marne-La-Vallée
License GSI
2009/2010

T.D. 5 : Intégrales multiples : corrigé

Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} (x^2 - xy + 4y^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\iint_{[0,1]\times[0,2]} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

On trouve

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} (x^2 - xy + 4y^3)\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2y}{2} + 4xy^3\right]_0^1 dy = \int_0^1 \frac{1}{3} - \frac{y}{2} + 4y^3\,dy = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + 1 = \frac{13}{12}$$

et

$$\iint_{[0,1]\times[0,2]} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \int_0^1 \left[x\sqrt{x^2+y^2}\right]_0^2 dx = \int_0^1 x\sqrt{x^2+4} - x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}(x^2+4)^{3/2}\right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$
$$= \frac{5^{3/2}}{3} - \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{5^{3/2}}{3} - 3.$$

Exercice 2. Calculer la surface du disque D_a de rayon a de deux manières :

- en décomposant
$$\iint_{D_a} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-a}^{a}\left(\int_?^? \mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

On a $D_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2+y^2 \le a^2\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 |\ -a \le x \le a, -\sqrt{a^2-x^2} \le y \le \sqrt{a^2-x^2}\}$.
On peut donc écrire :

$$Surface(D_a) = \iint_{D_a} dx\,dy = \int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dx\,dy = \int_{-a}^{a} 2\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Avec le changement de variables $x = a\cos\theta$, *on trouve alors :*

$$Surface(D_a) = 2a^2\int_{-\pi}^{0}\sin^2\theta\,d\theta = 2a^2\int_{-\pi}^{0}\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\,d\theta = \pi a^2.$$

- à l'aide d'un changement de variable polaire.

Même exercice pour le volume de la boule B_a de rayon a :

- en décomposant
$$\iiint_{B_a} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{-a}^{a}\left(\int_?^?\left(\int_?^? \mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z.$$

- à l'aide d'un changement de variable sphérique.

Exercice 3. Calculer

$$\iiint_\Omega \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}$$

où $\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^2, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0, x^2+y^2+z^2 \le R^2\}$.

Exercice 4. Calculer

$$\iint_\Omega e^{\frac{x-y}{x+y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

où $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0, 1/2 \leq x + y \leq 1\}$. On pourra considérer le changement de variable

$$\begin{cases} u = & x + y \\ v = & x - y \end{cases}.$$

Exercice 5. On cherche à calculer la quantité $I = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \mathrm{d}x$. Montrer que $I^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} re^{-r^2} \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$. En déduire la valeur de I.

Exercice 6. Calculer

$$\iint_{\Omega} (x^2 - y^2) \cos(xy) \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

où $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 2 < x + y < 4, xy > 1, x > y\}$, à l'aide du changement de variable

$$\begin{cases} u = & x + y \\ v = & xy \end{cases}.$$