

T.D. 6 : Décomposition en éléments simples

Exercice 1. Donner dans chaque cas le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B :

$$A(X) = X^4 - 3X + 2, \quad B(X) = X^2 + X - 1,$$

$$A(X) = X^4 + 1, \quad B(X) = X^2 - 1.$$

Exercice 2. Décomposer les fractions suivantes en éléments simples dans \mathbb{C} puis dans \mathbb{R} :

$$\frac{X^3 + X^2 - 1}{X^2 - 1}, \quad \frac{X^3}{X^2 + 1}, \quad \frac{X^5}{X^4 - 1}, \quad \frac{X^6}{X^4 - 2X^3 + X^2}$$

$$\frac{1}{(X - a)(X - b)}, \quad \frac{X^5 + X^3 + 1}{X^4 + 2X^2 + 1}.$$

Exercice 3. On se donne un polynôme $P = \prod_{i=1}^n (X - a_i)^{k_i}$. Donner la décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$.

Exercice 4. Décomposer en éléments simples sur \mathbb{C} puis sur \mathbb{R} , la fraction $\frac{1}{X^n - 1}$.

Exercice 5. Donner une primitive de chacune des fractions rationnelles suivantes

$$\frac{1}{ax^2 + b}, \quad \frac{1}{ax + b}, \quad \frac{x}{ax^2 + b},$$
$$\frac{x^2 + x + 1}{x^4 - 1}, \quad \frac{x^5}{x^3 - x}, \quad \frac{x}{x^3 + x^2 - x - 1}.$$