Université Paris-Est Marne-La-Vallée
License GSI
2009/2010

T.D. 7 : Intégrales

- On rappelle la formule de *changement de variables* : si $\varphi :]a,b[\to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable strictement croissante (resp. décroissante) alors φ est une bijection de $]a,b[$ sur $]\varphi(a),\varphi(b)[$ (resp. sur $]\varphi(b),\varphi(a)[$), et on a :
$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u.$$
On dit qu'on a effectué le changement de variables $x = \varphi(u)$.

- Formule d'intégration par parties :
$$\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x.$$

Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^a \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\mathrm{d}x, \quad \int_0^a \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^2(x)+1}\mathrm{d}x, \quad \int_0^\pi \frac{\cos x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x, \quad \int_0^1 \frac{3x^5+5x^4+2x^3+1}{x^6+2x^5+x^4+2x+3}\mathrm{d}x.$$

Exercice 2. Calculer les intégrales suivantes. On pourra effectuer un changement de variables trigonométrique : $u = \sin(x)$, $u = \cos(x)$, $u = \tan(x)$, ou $u = \tan(x/2)$.

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{\sqrt{2}-\cos x}\mathrm{d}x, \quad \int_0^\pi \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}\mathrm{d}x, \quad \int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x \cos x}, \quad \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}.$$

Exercice 3. Calculer les primitives suivantes :

$$\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{e^x + e^{-x}}, \quad \int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{e^x + 2e^{-x} + 1}.$$

Exercice 4. Calculer

$$\int_{1/2}^2 \frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

Exercice 5. Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x}\mathrm{d}x, \quad \int_0^a x^2 \arctan(x)\mathrm{d}x, \quad \int_0^1 \arcsin x\mathrm{d}x.$$

Exercice 6. Calculer les primitives suivantes :

$$\int_0^1 (x^2+1)e^{2x}\mathrm{d}x, \quad \int_0^a (x^2+1)\cos x\mathrm{d}x.$$