Université Paris-Est Marne-La-Vallée
License GSI
2009/2010

T.D. 8 : Transformée de Laplace

Exercice 1. Résoudre à l'aide de la transformée de Laplace l'équation différentielle

$$y'' + 2y' + y = 1$$

avec les conditions initiales $y'(0) = 1$ et $y(0) = -1$.

Exercice 2. Résoudre

$$y'''' - y = 0$$

sous la condition $y(0) = 1$, $y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$.

Exercice 3. Montrer que la transformée de Laplace de la fonction $xf(x)$ est $-(\mathcal{L}f)'(p)$ et que celle de $f(x)/x$ est $\int_p^\infty \mathcal{L}f(q)\mathrm{d}q$.

Application :

1. De quelle fonction $\frac{p}{(1+p^2)^2}$ est elle la transformée de Laplace ?
2. Quelle est la transformée de Laplace de la fonction $\sin(x)/x$?
3. De quelle fonction $\arctan(2/p)$ est elle la transformée de Laplace ?

Exercice 4. Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 - y_2 - 1 - 4t \\ y_2' = 5y_1 - 2y_2 - 2 - 5t \end{cases},$$

avec les conditions initiales $y_1(0) = 1$ et $y_2(0) = 8$.

Exercice 5. On considère une poutre horizontale de longueur unité aux extrémités fixes, assimilée à une fonction continue sur $[0, 1]$. La déformation de cette poutre sous l'effet d'une charge est donnée par l'équation

$$y^{(4)}(x) = -q(x),$$

où q désigne la charge supportée par la poutre au point x. Les conditions aux bords sont telles que $y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = 0$.

1. Calculer la transformée de Laplace de y en fonction de celle de q et des quantités $y''(0)$ et $y'''(0)$.
2. Quand q est donnée par
$$q(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \geq 1/2 \\ 1 \text{ si } x < 1/2 \end{cases},$$
en déduire l'expression de $\mathcal{L}y$ en fonction de $y''(0)$ et $y'''(0)$. Que vaut alors y ?

Exercice 6. Soit f une fonction continue sur $[0, \infty[$ ayant une limite finie en ∞. Montrer que

$$\lim_{p \to 0^+} p\mathcal{L}f(p) = \lim_{x \to \infty} f(x).$$

Exercice 7. Trouver les fonctions f telles que

$$\int_0^x \cos(x-t)f(t)\mathrm{d}t = e^x - 1.$$

De même, trouver les fonctions f telles que

$$\int_0^x \cos(x-t)f(t)\mathrm{d}t = g(x),$$

où g est une fonction donnée satisfaisant $g(0) = 0$.