Université Paris-Est Marne-La-Vallée
License GSI
2009/2010

T.D. 9 : Séries de Fourier

Exercice 1. Calculer les coefficients de Fourier de la fonction impaire $2\pi-$périodique f définie pour x dans $[0, \pi[$ par $f(x) = 1$.

Exercice 2. Soit f une fonction dérivable. Calculer les coefficients de Fourier de la fonction f' en fonction de ceux de f.
De même, si f est dérivable k fois, calculer les coefficients de Fourier de la fonction $f^{(k)}$.
Comment peut on donc “voir” la dérivabilité d'une fonction sur ses coefficients de Fourier ?

Exercice 3. Donner les séries de Fourier des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sin^2(x)$
2. $g(x) = \sin^2(x)\cos(x)$
3. $h(x) = \cos^4(x)$.

Exercice 4. On définit le produit de convolution de deux fonctions $2\pi-$périodiques f et g par la formule

$$f * g(x) = \int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t.$$

Calculer les coefficients de Fourier de $f * g$ en fonction de ceux de f et g.

Exercice 5. Calculer les coefficients de Fourier de la fonction f paire et 2π-périodique définie pour x dans $[0, \pi]$ par $f(x) = x$. En écrivant f comme la somme de sa série de Fourier (justifier !), montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 6. On étudie la propagation de la chaleur dans un anneau de métal. La température au temps t en un point de l'anneau est représentée comme une fonction $T(t, \theta)$ dépendant de l'angle θ fait entre le point considéré, le centre de l'anneau et un point de repère fixé sur l'anneau. A un instant t fixé, la fonction $T(t, \cdot)$ est donc $2\pi-$périodique.
La propagation de chaleur est donnée par l'équation

$$\frac{\partial T}{\partial t}(t, \theta) = \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}(t, \theta),$$

et la température à l'instant initial $t = 0$ est donnée par la fonction $T_0(\theta)$. Donner, pour tout temps t, la représentation en série de Fourier de $T(t, \theta)$, en fonction de celle de T_0. Que peut on dire de l'évolution de la dérivabilité de la fonction $T(t, \cdot)$ en fonction du temps ?