Université Paris-Est Marne-La-Vallée
License GSI
2009/2010

Annales d'examen (dérviées partielles, équations difféerentielles)

Exercice 1. On considère l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x}.$$

1. Utiliser les coordonnées polaires pour trouver la solution générale de cette équation.
2. Déterminer la solution qui s'annulle sur le cercle unité $x^2 + y^2 = 1$.

(On rappelle qu'en coordonnées polaires, on a

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} \;\; et \;\; \frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}).$$

Exercice 2. On considère l'équation différentielle

$$y' - |x|y = x. \tag{1}$$

1. Résoudre cette équation sur l'intervalle $]0, \infty[$.
2. Trouver la solution sur $]0, \infty[$ qui vérifie $y(\sqrt{2}) = 0$, on note F cette fonction.
   On se propose de prolonger F en une solution de l'équation sur $\mathbb{R}$ tout entier.
3. Résoudre l'équation (1) sur $]-\infty, 0[$.
4. Comment choisir la constante d'intégration pour que la solution obtenue se raccorde à F ? Vérifier alors la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de la fonction obtenue.
5. Conclure.

Exercice 3. Résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

en passant en coordonnées polaires. Trouver la solution qui s'annule en $\theta = 0$.

Exercice 4. Étudier l'équation différentielle

$$xy'(x) + y(x) + \frac{2x+5}{(x+1)^2} = 0.$$

Exercice 5. Résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1-xy}{x}$$

avec le changement de variables

$$\begin{cases} u = x + \ln|y| \\ v = y + \ln|x| \end{cases}$$

munie de la condition $f(x = 1, y = 0) = 0$.

Exercice 6. Étudier l'équation différentielle

$$y'(x) + y(x) = \frac{xe^{-x}}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Exercice 7. On considère l'équation différentielle

$$y' - 2y = x, \quad y(0) = 1.$$

1. Résoudre cette équation par la méthode de variation des constantes.
2. Résoudre cette équation en utilisant la transformation de Laplace.

Exercice 8. Utiliser les coordonnées polaires pour résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)+y\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=x^2+y^2,$$

où f est la fonction inconnue.

Exercice 9. On considère l'équation différentielle $y'-3y=-x,\quad y(0)=1$.

1. Résoudre cette équation par la méthode de variation des constantes.
2. Résoudre cette équation en utilisant la transformation de Laplace.

Exercice 10. Résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x-y,$$

à l'aide du changement de variables

$$\begin{cases} u=x+y \\ v=x-y \end{cases}.$$

Exercice 11. On considère l'équation différentielle de fonction inconnue y d'une variable x

$$y'-\frac{y}{|x|}=x^2. \tag{2}$$

1. Résoudre (2) pour $x>0$ puis pour $x<0$.
2. Soit y_1 la solution de (2) vérifiant $y_1(-1)=0$. Déterminer y_1. Sur quel intervalle y_1 est elle solution de (2) ? Peut on prolonger y_1 en une solution sur $\mathbb{R}$ tout entier ?
3. Même question avec y_2 solution de (2) vérifiant $y_2(-1)=-\frac{1}{4}$.