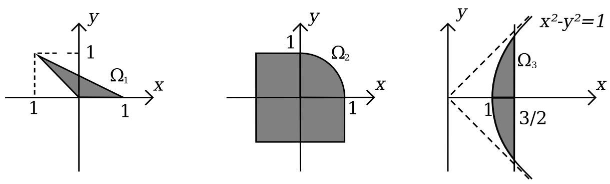
Université Paris-Est Marne-La-Vallée
License GSI
2009/2010

Annales d'examen (intégrales de plusieurs variables)

Exercice 1. Intégrer la fonction $f(x,y) = xy^2$ sur les domaines $\{\Omega_i\}_{i=1,2,3}$ donnés dans la figure suivante :



Exercice 2. On considère le volume

$$\mathcal{V} = \begin{cases} x^2 + y^2 \leq (z+L)^2 & \text{pour } -L \leq z < 0 \\ x^2 + y + z^2 \leq L^2 & \text{pour } z \geq 0 \end{cases}.$$

Calculer ce volume et son moment d'inertie vis-à-vis de la verticale, la densité de matière ρ étant constante.

Exercice 3. Intégrer la fonction $f(x,y) = xy^2$ sur les domaines donnés ci-dessous :

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x \geq 0, x+y \leq 1, x-y \leq 1\}, \\
\Omega_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x \geq 0, a^2 \leq x^2 + y^2 \leq A^2\}, \\
\Omega_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 \leq x \leq 2, 0 \leq x+y \leq 2, x-y \geq 0\}, \\
\Omega_4 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ a \leq |x| \leq A, a \leq |y| \leq A, x+y \geq 0\}, \\
\Omega_5 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x \geq 0, x+y \geq 1, x-y \geq 1, x^2+y^2 \leq 1\}.
\end{aligned}$$

Indications : n'hésitez pas à réutiliser les résultats des autres intégrales. Souvenez vous de la propriété de Chasles.

Exercice 4. On considère le volume

$$\mathcal{V} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + y^2 + z \leq 1\}.$$

Calculer son volume et son moment d'inertie vis-à-vis de la verticale, la densité de maière ρ étant constante. On se rappellera de la formule :

$$I_z = \iiint_{\mathcal{V}} \rho(x,y,z)(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Exercice 5.

1. Calculer
$$\iint_{\mathcal{D}} xy^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
où $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2+y^2 \leq 4, x \leq 0, y \geq 0\}$.
2. Même question avec $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2+y^2 \leq 4, x \leq 0\}$.

Exercice 6. Calculer
$$\iint_{\Delta} xy^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
où $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x+y \leq 0, x-y \leq 0, x \geq -1\}$.

Exercice 7. On considère $\mathcal{E}$ l'intérieur de l'ellipse : $\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ où a et b sont deux constantes réelles telles que $0 < b < a$. Calculer l'aire de $\mathcal{E}$, on pourra utiliser le changement de variables :

$$\begin{cases} x = ar\cos\theta \\ x = br\sin\theta \end{cases} \quad \text{avec } 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1.$$

Exercice 8. Soit Ω le volume de l'espace délimité par le cône $x^2 + y^2 = z^2$, la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ et le plan $z = 0$:

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + y^2 \leq z^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\}.$$

1. Calculer le volume de Ω (on pourra utiliser les coordonnées sphériques).
2. Soit le tronc du cône :

$$\Omega' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + y^2 \leq z^2, \frac{R}{\sqrt{2}} \geq z \geq 0\}.$$

   On suppose que Ω a une densité constante égale à ρ, calculer son moment d'inertie par rapport à l'axe Oz, on pourra procéder "par tranches".

Exercice 9. On désigne par $\mathcal{H}$ l'hyperboloïde de $\mathbb{R}^3$ d'équation

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

1. Quelle est la nature de l'intersection entre $\mathcal{H}$ et le plan d'équation $z = 0$?
2. Même question avec le plan d'équation $z = a$.
3. Représenter graphiquement $\mathcal{H}$.
4. On appelle $\mathcal{V}$ la partie intérieure de $\mathcal{H}$ limitée par les plans $z = \pm 1$:

$$\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + y^2 - z^2 \leq 1, -1 \leq z \leq 1\}.$$

   Calculer le volume de $\mathcal{V}$.
5. On suppose que $\mathcal{V}$ a une densité ρ constante ; calculer le moment d'inertie de $\mathcal{V}$ par rapport à l'axe $x = y = 0$.

Exercice 10.

1. Calculer

$$\iint_{\mathcal{D}} x \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

   où $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$.
2. Même question avec $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0\}$.
3. Même question avec $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y \leq 4, y \geq 0, x \geq 0\}$.

Exercice 11. On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé (O, i, j, k), et on considère le tronc de cône de sommet O et de base le cercle du plan $z = 1$ dont l'équation dans ce plan est donnée par $x^2 + y^2 = 1$.

1. Représenter ce tronc de cône.
2. Calculer son volume.
3. On suppose que l'intérieur du tronc de cône a une densité constante égale à ρ, calculer son moment d'inertie par rapport à l'axe (Oz).