Transformée de Laplace : Formulaire

On désigne par la lettre H la fonction de Heaviside : $H(x)\begin{cases}1 \text{ si } x>0\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$. La transformée de Laplace d'une fonction $f : [0,\infty[\to\mathbb{C}$ est définie pour $p\in\mathbb{C}$ par

$$\mathcal{L}f(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\mathrm{d}t.$$

Cette intégrale à un sens pour p dans un ensemble de la forme $\{z\in\mathbb{C} \text{ tels que } \mathcal{R}e(z)>p_0\}$. Deux fonctions ayant la même transformée de Laplace sont égales sur $[0,\infty[$.

Quelques formules à connaître (ou à savoir retrouver à partir de la définition) :

$f(x)$	$\mathcal{L}f(p)$
x^n	$\frac{(n-1)!}{p^{n-1}}$
$H(x-a)f(x-a)$	$e^{-ap}\mathcal{L}f(p)$
$e^{ax}f(x)$	$\mathcal{L}f(p-a)$
$f'(x)$	$p\mathcal{L}f(p)-f(0)$
$(Hf)*(Hg)$	$\mathcal{L}f\times\mathcal{L}g$

Le symbole $*$ désigne le *produit de convolution* défini, quand l'intégrale a un sens, par

$$f*g(x)=\int_{\mathbb{R}}f(x-t)g(t)\mathrm{d}t.$$

Notament, le produit de convolution de Hf et Hg est donné par :

$$(Hf)*(Hg)(x)=\int_0^x f(x-t)g(t)\mathrm{d}t.$$

En composant les formules du tableau précédent, on obtient :

$f(x)$	$\mathcal{L}f(p)$
x^n	$\frac{(n-1)!}{p^{n-1}}$
$H(x-a)f(x-a)$ (avec $a\geq 0$)	$e^{-ap}\mathcal{L}f(p)$
$e^{ax}x^n$	$\frac{(n-1)!}{(p-a)^{n-1}}$
$\cos(\omega x)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$\sin(\omega x)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$e^{ax}\cos(\omega x)$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$
$e^{ax}\sin(\omega x)$	$\frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$
$f^{(n)}(x)$	$p^n\mathcal{L}f(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-\ldots-pf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0).$

D'autres formules, portant sur les valeurs prises par la fonction et sa transformée de Laplace :

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{p\to 0}p\mathcal{L}f(p), \text{ et } \lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{p\to\infty}p\mathcal{L}f(p).$$