Université Paris-Est Marne-La-Vallée
License GSI
2009/2010

Rappels de cours : Algèbre linéaire

1 Déterminant

Définition 1. *Soit une matrice* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. *On appelle déterminant de A, la quantité*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Soit une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. *On appelle déterminant de A la quantité*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh.$$

Exemple : $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - (-3) \times 2 = 10.$
Calcul pratique du déterminant de taille 3 : on peut calculer en développant par rapport à une ligne ou une colonne.
Exemple : par rapport à la première ligne

$$\det(A) = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix},$$

par rapport à la deuxième colonne

$$\det(A) = -b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + e \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} - h \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}.$$

Exemple : $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \times (-2) + 2 \times (-5) = -12$ (on développe par rapport à la première colonne).

Propriété 1. *Pour une matrice A donnée, l'équation* $Av = 0$ *admet une solution non nulle si et seulement si* $\det(A) = 0$.

Exemple :

- pour $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$, on a bien $\det(A) = 0$, et on trouve pour solutions à $Av = 0$ les vecteurs de la forme $v = k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, où k est un réel quelconque.
- pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, on a bien $\det(A) = 0$, et on trouve les solutions $v = k \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour un réel k quelconque.

2 Eléments propres d'une matrice

Définition 2. *Soit A une matrice et v un vecteur non nul satisfaisant $Av = \lambda v$, pour un réel λ. On dit que v est un vecteur propre de A, et que λ est la valeur propre associée à v.*

Attention, le vecteur nul n'est pas considéré comme un vecteur propre !
Écrire $Av = \lambda v$ revient à écrire $(A - \lambda I)v = 0$, où I est la matrice identité. Par conséquent, λ est une valeur propre de A si et seulement si $\det(A - \lambda I) = 0$, c'est à dire si λ est une racine du polynôme $\det(A - XI)$, appelé polynôme caractéristique de A.

Propriété 2. *Si on peut trouver une base de l'espace formée de vecteurs propres d'une matrice A alors on peut la* diagonaliser *au sens suivant : on peut trouver une matrice inversible P telle que $A = PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de A. La $i^{\text{ème}}$ colonne de P est alors le vecteur propre associé à la $i^{\text{ème}}$ valeur propre de A.*

<u>Exemple :</u> $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique

$$\det(A - XI) = \begin{vmatrix} 2-X & 3 \\ 0 & -1-X \end{vmatrix} = (2-X)(-1-X) - 3 \times 0 = X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2).$$

Les valeurs propres de A sont donc -1 et 2, et des vecteurs propres associés sont $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On peut alors vérifier que :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a ici $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, qui est bien diagonale, et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, soit $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3 Application aux équations différentielles

On cherche à résoudre un système d'équations différentielles linéaires, par exemple :

$$\begin{cases} x' = & 5x - 6y \\ y' = & 3x - 4y \end{cases}, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$$

On peut réecrire le système sous forme matricielle : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. La matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique $X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2)$. Ses valeurs propres sont donc -1 et 2, avec pour vecteurs propres associés $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, et on peut donc la diagonaliser sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = PDP^{-1}.$$

En posant alors

$$\begin{cases} u = & -x + 2y \\ v = & x - y \end{cases},$$

ce qui revient à écrire $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on a donc

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = P^{-1}PDP^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

soit encore

$$\begin{cases} u' = & -u \\ v' = & 2v \end{cases}, \quad u(0) = -1, \quad v(0) = 1,$$

ce qui se résout en $u(t) = -e^{-t}$, $v(t) = e^{2t}$. On retrouve donc

$$x(t) = u(t) + 2v(t) = -e^{-t} + 2e^{2t}, \quad \text{et} \quad y(t) = u(t) + v(t) = -e^{-t} + e^{2t}.$$