Université Paris-Est Marne-La-Vallée
Licence GSI
2009/2010

Rappels : Décomposition en éléments simples

Le but de ce rappel est de présenter la *décomposition en éléments simples* d'une fraction rationnelle, c'est à dire d'une expression algébrique de la forme $\frac{P(X)}{Q(X)}$. Ces fractions peuvent s'écrire comme somme de fractions plus simples.

1 Division euclidienne

On a tout d'abord besoin de la notion de *division euclidienne* :

Propriété 1. *Étant donnés deux polynômes $A(X)$ et $B(X)$, il existe un unique couple de polynômes $(Q(X), R(X))$ tel que* $\deg(R(X)) < deg(B(X))$ *et* $A(X) = B(X)Q(X)+R(X)$. *($Q(X)$ est appelé* quotient *de la division euclidienne, et $R(X)$ est appelé* reste.

Ce couple de polynôme peut être trouvé en posant la division, et en calculant comme avec des entiers. Par exemple pour $A(X) = 3X^5 - 2X^4 - 2X^3 + X + 2$ et $B(X) = X^4 + 2X^2 + 1$, on a :

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
3X^5 & -2X^4 & -2X^3 & & +X & +2 & X^4+2X^2+1 \\
-3X(X^4 & & +2X^2 & & +1) & & \hline 3X-2 \\
\hline
 & -2X^4 & -8X^3 & & -2X & +2 & \\
 & +2(X^4 & & +2X^2 & & +1) & \\
\cline{2-6}
 & & -8X^3 & +4X^2 & -2X & +4 &
\end{array}$$

On trouve $Q(X) = 3X - 2$ et $R(X) = -8X^3 + 4X^2 - 2X + 4$. On vérifie que l'on a bien :

$$3X^5 - 2X^4 - 2X^3 + X + 2 = (X^4 + 2X^2 + 1)(3X - 2) + (-8X^3 + 4X^2 - 2X + 4).$$

Maintenant, si l'on a une fraction rationnelle de la forme $F(X) = \frac{A(X)}{B(X)}$, on peut écrire (en notant $A(X) = B(X)Q(X)+R(X)$ la division euclidienne de A par B) $F(X) = \frac{Q(X)B(X)+R(X)}{B(X)} = Q(X) + \frac{R(X)}{B(X)}$. En conclusion, on peut écrire toute fraction rationnelle comme somme d'un polynôme (ici $Q(X)$) et d'une fraction dont le dénominateur (ici $B(X)$) a un degré supérieur à celui du numérateur (ici $R(X)$). Dans notre exemple, on peut donc écrire :

$$\frac{3X^5 - 2X^4 - 2X^3 + X + 2}{X^4 + 2X^2 + 1} = 3X - 2 + \frac{-8X^3 + 4X^2 - 2X + 4}{X^4 + 2X^2 + 1}.$$

2 Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$

Tout polynôme $B(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ peut se décomposer en produit de polynômes de degrés 1 : $B(X) = a_n \prod_{i=1}^{q} (X - \alpha_i)^{k_i}$, où les α_i sont des nombres complexes appelés *racines* du polynôme P. Une fraction rationnelle ayant B pour dénominateur et dont le numérateur à un degré inférieur à celui de B (cas auquel on peut toujours se ramener, voir ci-dessus) se décompose de manière unique sous la forme :

$$\frac{A(X)}{B(X)} = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{k_i} \frac{c_{i,j}}{(X - \alpha_i)^j},$$

où les $c_{i,j}$ sont des coeffiecients complexes.

Pour revenir à notre exemple, on a $B(X) = X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$. On a alors la décomposition

$$\frac{3X^5 - 2X^4 - 2X^3 + X + 2}{X^4 + 2X^2 + 1} = 3X - 2 + \frac{-8X^3 + 4X^2 - 2X + 4}{X^4 + 2X^2 + 1} = 3X - 2 + \frac{2i - 4}{X + i} + \frac{3i/2}{(X + i)^2} + \frac{-2i - 4}{X - i} + \frac{-3i/2}{(X - i)^2}.$$

Pour trouver la décomposition, on pose :

$$\frac{-8X^3 + 4X^2 - 2X + 4}{X^4 + 2X^2 + 1} = \frac{a}{X + i} + \frac{b}{(X + i)^2} + \frac{c}{X - i} + \frac{d}{(X - i)^2}.$$

En multipliant par $(X-i)^2$, et en évaluant la fraction obtenue en $X=i$ on trouve

$$\frac{-8i^3+4i^2-2i+4}{(i+i)^2} = \frac{a(i-i)}{i+i} + \frac{b(i-i)^2}{(i+i)^2} + c(i-i) + d.$$

On trouve donc $d=-3i/2$. On procède de même pour $(X+i)^2$ (en évaluant en $X=-i$) et on obtient $b=3i/2$. Ensuite on a

$$\begin{aligned}\frac{a}{X+i} + \frac{c}{X-i} &= \frac{-8X^3+4X^2-2X+4}{X^4+2X^2+1} - \frac{-3i/2}{(X-i)^2} - \frac{3i/2}{(X+i)^2} \\ &= \frac{-8X^3+4X^2-2X+4+3i/2(X+i)^2-3i/2(X-i)^2}{X^4+2X^2+1}. \\ &= \frac{-8X^3+4X^2-8X+4}{X^4+2X^2+1}.\end{aligned}$$

En faisant la division euclidienne de $-8X^3+4X^2-8X+4$ par X^2+1, on trouve $-8X^3+4X^2-8X+4=(X^2+1)(-8X+4)$. On a donc

$$\frac{a}{X+i} + \frac{c}{X-i} = \frac{-8X+4}{X^2+1}$$

En multipliant cette égalité par $(X-i)$, et en évaluant en $X=i$, on trouve $c=-2i-4$. De même on trouve $a=2i-4$.

3 Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$

Si l'on impose que tous les coefficients utilisés soient réels, un polynôme se décompose en $B(X) = a_n \prod_{i=1}^{q_1}(X-\alpha_i)^{k_i} \times \prod_{i=1}^{q_2}(X^2+\beta_i X+\gamma_i)^{l_i}$, où les polynômes $X^2+\beta_i X+\gamma_i$ n'ont pas de racines réelles. La décomposition en éléments simples est alors la suivante :

$$\frac{A(X)}{B(X)} = \sum_{i=1}^{q_1}\sum_{j=1}^{k_i} \frac{c_{i,j}}{(X-\alpha_i)^j} + \sum_{i=1}^{q_2}\sum_{j=1}^{l_i} \frac{a_{i,j}X+b_{i,j}}{(X^2+\beta_i X+\gamma_i)^j}.$$

Sur notre exemple :

$$\frac{3X^5-2X^4-2X^3+X+2}{X^4+2X^2+1} = 3X-2+\frac{2i-4}{X+i}+\frac{3i/2}{(X+i)^2}+\frac{-2i-4}{X-i}+\frac{-3i/2}{(X-i)^2} = 3X-2+\frac{-8X+4}{X^2+1}+\frac{6X}{(X^2+1)^2}.$$

Pour trouver la décomposition, on fait la décomposition sur $\mathbb{C}$ puis on regroupe deux par deux les termes conjugués.