Université Paris-Est Marne-La-Vallée
License GSI
2010/2011

T.D. 1 : Étude de fonctions - Dérivation

Exercice 1. Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \sqrt{x^2-2} \ ; \ f_2(x) = \frac{x+3}{x^2-1} \ ; \ f_3(x) = \ln\left(1-\sqrt{x^2-2}\right)$$

$$f_4(x) = \sqrt{5-x} + \sqrt{\ln(x)} \ ; \ f_5(x) = \frac{1}{\sqrt{\ln(x)-1}} \ ; \ f_6(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x^2-2}}.$$

Exercice 2. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$g_1(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \ ; \ g_2(x) = \ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) \ ; \ g_3(x) = \sin^3(e^x)$$

$$g_4(x) = e^{\frac{1+x}{1-x}} \ ; \ g_5(x) = \sin^2\left(1+x^2\right) + \cos^2\left(1+x^2\right) \ ; \ g_6(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

(on donnera deux expressions de la dérivée de g_6).

Exercice 3. Faire un tableau de variations des fonctions suivantes, puis en tracer le graphe:

$$h_1(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \ ; \ h_2(x) = \frac{1}{x^2+x-6} \ ; \ h_3(x) = \ln\left(\sqrt{2x^3-6x}\right)$$

$$h_4(x) = \frac{x}{1-x^2} \ ; \ h_5(x) = \frac{1}{\sin^2(x)-1} \ ; \ h_6(x) = e^{-x^2}.$$

Exercice 4. Fonctions trigonométriques inverses On cherche à définir des fonctions arccos, arcsin et arctan qui soient les fonctions réciproques des fonctions cos, sin et tan, c'est à dire telles que, pour de bonnes valeurs de x, on ait

$$\begin{cases} \cos(\arccos(x)) = x & ; \ \arccos(\cos(x)) = x \\ \sin(\arcsin(x)) = x & ; \ \arcsin(\sin(x)) = x \\ \tan(\arctan(x)) = x & ; \ \arctan(\tan(x)) = x \end{cases}$$

(on rappelle que $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$).

1. Quel sont les domaines de définition “naturels” de ces trois fonctions ?
2. Donner une définition de ces trois fonctions de sorte que pour chacune des six équations ci-dessus, l'ensemble des valeurs x pour lesquelles l'équation est satisfaite est le plus simple possible. Donner chacun de ces ensembles.
3. Tracer les graphes des fonctions arcsin, arccos et arctan.
4. En utilisant la formule de dérivation d'une composée de fonctions, calculer les dérivées de ces trois fonctions.
5. Tracer le graphe de la fonction arccos + arcsin.

Exercice 5. Le problème du nageur

Robert et Raymonde sont en vacances à la mer, en train de se baigner. Ils se touvent chacun à 100 mètres de la plage, mais sont éloignés de 500 mètres. Sachant que Robert nage à une vitesse de $3km.h^{-1}$ et marche à une vitesse de $5km.h^{-1}$ quel chemin doit il emprunter pour rejoindre Raymonde au plus vite ?