

T.D. 2 : Intégration

Rappels :

- Formule de *changement de variables* : si  $\varphi : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction dérivable strictement croissante (resp. strictement décroissante) alors  $\varphi$  est une bijection de  $]a, b[$  sur  $] \varphi(a), \varphi(b)[$  (resp. sur  $] \varphi(b), \varphi(a)[$ ), et on a :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(u)) \varphi'(u) du.$$

On dit qu'on a effectué le changement de variables  $x = \varphi(u)$ .

- Formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x) dx.$$

**Exercice 1.** Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^a \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx, \quad \int_0^\pi \frac{\sin(x) \cos x}{1 + \cos^2 x} dx, \quad \int_0^1 \frac{3x^5 + 5x^4 + 2x^3 + 1}{x^6 + 2x^5 + x^4 + 2x + 3} dx, \quad \int_{-1}^1 (2x + 3x^2) \sqrt{1 + x^2 + x^3} dx.$$

**Exercice 2.** Donner une primitive des fonctions  $\ln$  et  $\arcsin$ .

**Exercice 3.** Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{1 + x^2} dx, \quad \int_0^a x^2 \arctan(x) dx, \quad \int_1^2 x \ln(x) dx.$$

**Exercice 4.** Calculer les primitives suivantes :

$$\int_0^a \frac{dx}{e^x + e^{-x}}, \quad \int_0^a \frac{dx}{e^x + e^{-x} + 2}.$$

**Exercice 5.** Calculer les intégrales suivantes. On pourra effectuer un changement de variables trigonométrique :  $u = \sin(x)$ ,  $u = \cos(x)$ ,  $u = \tan(x)$ , ou  $u = \tan(x/2)$ .

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{4 - \cos^2 x} dx, \quad \int_0^\pi \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} dx, \quad \int_0^a \frac{dx}{1 + \sin x \cos x}, \quad \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2 + \cos x}.$$

**Exercice 6.** Calculer les primitives suivantes :

$$\int_0^a (x^2 + 1)e^{2x} dx, \quad \int_0^a (x^2 + 1) \cos x dx.$$

**Exercice 7.** Calculer

$$\int_{1/2}^2 \frac{\ln x}{1 + x^2} dx.$$