Université Paris-Est Marne-La-Vallée
License GSI
2010/2011

T.D. 4 : Intégrales multiples

Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} (x^2 - xy + 4y^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\iint_{[0,1]\times[0,2]} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Exercice 2. Calculer l'aire du disque D_a de rayon a, puis le volume de la sphère de rayon a.

Exercice 3. Calculer l'aire du domaine situé entre la parabole d'équation $y = x^2$ et la droite $y = ax + b$, en fonction de a et b.

Exercice 4. Calculer le volume de l'entonnoir hyperbolique, ou "*Trompette de Gabriel*", défini comme

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x \geq 1, y^2 + z^2 \leq 1/x^2\}.$$

Quelle est sa surface ?

Exercice 5. Quel est le volume de l'hyperboloïde

$$\mathcal{H} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^3 + y^2 - z^2 \leq 1, a \leq z \leq b\} \text{ ?}$$

Exercice 6. Calculer

$$\iiint_\Omega \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}$$

où $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$.

Exercice 7. Calculer

$$\iint_\Omega e^{\frac{x-y}{x+y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

où $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0, 1/2 \leq x + y \leq 1\}$. On pourra considérer le changement de variable

$$\begin{cases} u = & x+y \\ v = & x-y \end{cases}.$$

Exercice 8. On cherche à calculer la quantité $I = \int_\mathbb{R} e^{-x^2}\mathrm{d}x$. Montrer que $I^2 = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^\infty re^{-r^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$. En déduire la valeur de I.

Exercice 9. Calculer

$$\iint_\Omega (x^2 - y^2)\cos(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

où $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2 < x + y < 4, xy > 1, x > y\}$, à l'aide du changement de variable

$$\begin{cases} u = & x+y \\ v = & xy \end{cases}.$$

Exercice 10. On considère le tore, qui est le volume obtenu en faisant tourner autour de l'axe z le disque défini par $x = 0, (y-a)^2 + z^2 \leq b^2$, avec $a \leq b$. Donner une paramétrisation du tore en coordonnées polaires. Calculer son moment d'inertie par rapport à l'axe vertical.